Devoir Surveillé
Traitement du Signal
Junia Isen AP3

Les réponses seront expliquées, justifiées et correctement rédigées.
L'évaluation tiendra compte de cette rédaction et du raisonnement.

Un formulaire est disponible sur les pages 3 et 4.

Evaluation des connaissances (4,5 points)

1) Comment obtenir très simplement la composante continue d'un signal $x(t)$ à partir de sa transformée de Fourier ?

2) Pourquoi la transformée de Fourier est elle plus utile en traitement du signal que les séries de Fourier ?

3) Avec quel opérateur mathématique peut on calculer la sortie temporelle d'un filtre dont on connait la réponse impulsionnelle ?

Exercice 1 (6 points)

On considère une fonction de type porte, notée $x(t)$ et définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'objectif est de calculer la convolution de cette porte par elle-même, définie comme : $y(t) = x(t) * x(t)$.

1) Représenter le signal $x(t)$. *(attention de bien graduer les axes et donner les unités).*

2) Donner l'expression (l'intégrale) définissant la fonction $y(t)$.

3) Calculer complètement la fonction $y(t)$ en distinguant bien les différents cas pour montrer que :

$$y(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 - t, & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

4) Représenter le signal $y(t)$ sur l'intervalle $t \in [-1, 3]$. *(attention de bien graduer les axes et donner les unités).*

5) Comment appelle-t-on classiquement une fonction de la forme de $y(t)$?

Exercice 2 (5 points)

On considère cette fois une fonction de type porte centrée notée $x_2(t)$. Cette fonction est définie comme :

$$x_2(t) = \begin{cases} A, & \text{si } |t| \leqslant T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $A = 3$ et $T = 4$ ms.

1) Représenter le signal $x_2(t)$. *(attention de bien graduer les axes et donner les unités).*

2) Montrer (en détaillant les calculs) que la transformée de Fourier d'une porte centrée $x_2(t)$ (de largeur totale $2T = 8$ ms) peut s'écrire :

$$x_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} 2TA\frac{\sin(\pi f 2T)}{\pi f 2T} = 2TA\text{sinc}(\pi f 2T)$$

(*aide : le calcul peut être démontré en utilisant directement la définition de la transformée de Fourier ou bien en utilisant par exemple la propriété de dérivation de la transformée de Fourier. Pour rappel, un formulaire est disponible à la fin du sujet.)*

3) Représenter le spectre en amplitude (module) de cette porte.

Exercice 3 (6 points)

Soit le signal $y(t)$ suivant :

$$y(t) = 4 + 2.\sin(6.10^3\pi t) + 4.\cos(4.10^3 t).$$

1) Ce signal est-il d'énergie ou de puissance finie ?

2) Donner l'expression de la transformée de Fourier du signal $y(t)$.

3) Représenter le spectre d'amplitude (module) de $y(t)$.

4) Représenter le spectre de phase (argument) de $y(t)$.

Question Bonus (1 point) On échantillonne ce signal à la fréquence $F_e = 10.10^3$ Hz. Cet échantillonnage vous semble-t-il judicieux ? Justifier.

(Un formulaire est disponible sur les pages 3 et 4.)

Formulaire

Notation : tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = x + iy$$

où « x » et« y » sont des nombres réels et le nombre imaginaire est noté « i » tel que $i^2 = -1$.

Formules Trigo :

$$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a).\cos(b) - \sin(b).\cos(a)$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\sin(a).\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\cos(a).\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$
$$\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Définition de la convolution $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier : $x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i2\pi\nu t}dt$

- Changement d'échelle :

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & X(\nu) \\ x(kt) & \xrightarrow{\text{TF}} & \frac{1}{|k|}X\left(\frac{\nu}{k}\right) \end{array}$$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\nu)$
- Décalage temporel : $x(t-t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(\nu)\mathrm{e}^{-i2\pi\nu t_0}$
- Dérivation :
  - Par rapport au temps : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\text{TF}} (i2\pi\nu)^n X(\nu)$
  - Par rapport à la fréquence : $t^n x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n X(\nu)}{d\nu^n}\frac{1}{(-i2\pi)^n}$

Théorème de Plancherel

$$\begin{array}{ccccc} \text{(convolution)} & x(t) * y(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & X(\nu).Y(\nu) & \text{(multiplication)} \\ \text{(multiplication)} & x(t).y(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & X(\nu) * Y(\nu) & \text{(convolution)} \end{array}$$

Formules d'Euler

$$\cos(x) = \frac{(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})}{2i}$$

Quelques Transformées de Fourier utiles

$$e^{i2\pi\nu_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(\nu - \nu_0)$$
$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi\nu t_0}$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

Fonction sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(\pi\nu 2T) = \dfrac{\sin(\pi\nu 2T)}{\pi\nu 2T}$