

Partiel - Traitement du Signal

Junia AP3

Les réponses seront expliquées, justifiées et correctement rédigées.
L'évaluation tiendra compte de cette rédaction et du raisonnement.

Un formulaire est disponible sur les pages 4 et 5.

Exercice 1 (6 points)

On considère un signal $x(t)$ ayant les caractéristiques suivantes :

- Le spectre de $x(t)$ peut être considéré comme négligeable en dehors de l'intervalle $[20 \text{ Hz} - 140 \text{ Hz}]$
- Les valeurs d'amplitude de $x(t)$ sont comprises entre - 3 Volts et + 9 Volts.

On souhaite numériser ce signal $x(t)$ (échantillonnage, quantification et codage en binaire) avec un objectif :

- d'avoir une **erreur de quantification** au maximum égale à 0,1 Volts,
- d'avoir un dispositif de numérisation **utilisant le moins de bits possible**.

Préciser les traitements ou méthodes à mettre en place en chiffrant tous les paramétrages nécessaires pour chaque étape (échantillonnage, quantification (et nombre de bits)).

Exercice 2 (3 points)

La figure 1 suivante présente le spectre d'amplitude d'un signal analogique composé de deux sinusoïdes.

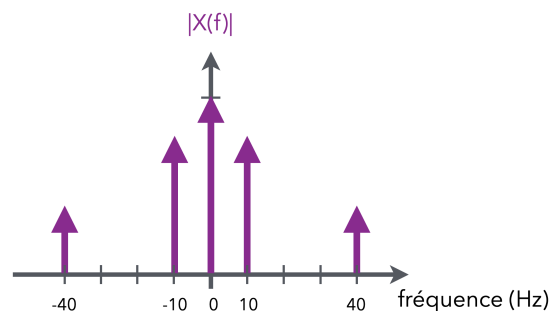


FIGURE 1 – Spectre d'amplitude du signal analogique $|X(f)|$.

- À partir de cette figure 3, déduire les fréquences présentes dans les sinusoïdes.
- À quoi correspond le dirac présent à la fréquence $f = 0 \text{ Hz}$?

Ce signal est ensuite échantillonné, en utilisant différentes valeurs de fréquence d'échantillonnage, comme présenté en figures 2(a) et 2(b).

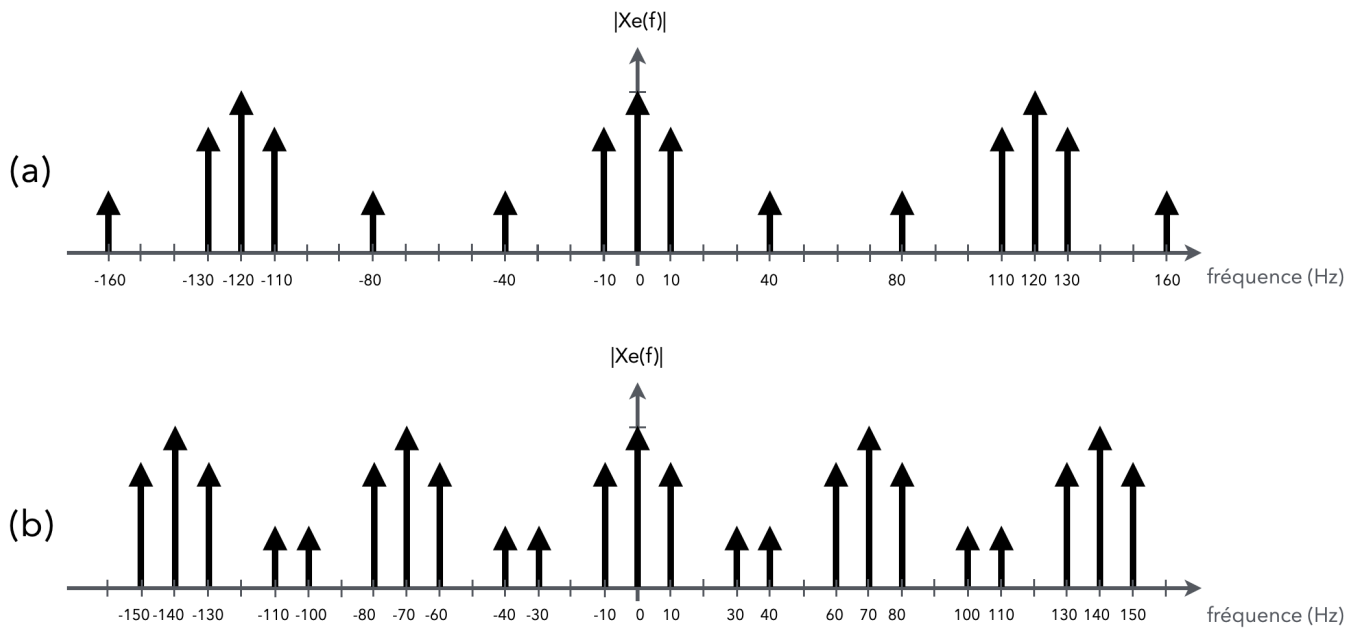


FIGURE 2 – (a) Spectre d’amplitude du signal numérisé à la fréquence d’échantillonnage f_{e1} . (b) Spectre d’amplitude du signal numérisé à la fréquence d’échantillonnage f_{e2} .

À partir de cette figure 2,

- expliquez les phénomènes observés (*aide : en partant de la figure 1, détaillez le processus qui permet d’obtenir la figure 2, par exemple cherchez à expliquer l’apparition d’une composante à ± 30 Hz*),
- donner pour les deux cas la fréquence d’échantillonnage utilisée et expliquez si ce choix semble judicieux ou non.

Exercice 3 (6 points)

Dans un laboratoire d’acoustique, Emma, ingénieure en traitement du signal souhaite analyser un enregistrement audio provenant d’une salle de concert où plusieurs instruments ont joué simultanément. Malheureusement, la qualité du spectre obtenu semble altérée par des artefacts, et elle doit déterminer les paramètres optimaux pour obtenir une analyse spectrale précise.

Données : L’enregistrement a été réalisé avec une fréquence d’échantillonnage $F_e = 44,1$ kHz et contient plusieurs harmoniques importantes. La durée entière de l’enregistrement est de 0,5 s.

- Emma commence par calculer la résolution spectrale de son analyse afin d’identifier correctement chaque fréquence.
 - Si elle effectue une transformée de Fourier discrète (TFD) sur une partie du signal enregistré en prenant $N = 2048$ points, quelle sera la résolution spectrale obtenue ?
 - En n’utilisant que $N = 2048$ échantillons, quelle est la durée de la portion de signal analysée ?
 - Si elle souhaite affiner son analyse sans modifier F_e , quelle(s) stratégie(s) peut-elle adopter ?

- 2) En observant le spectre brut, Emma remarque la présence de raies parasites qu'elle suspecte être causée par l'analyse sur une fenêtre rectangulaire.
- a) Pouvez vous décrire l'origine des raies parasites observées?
- 3) Emma sait que le signal étudié contient au moins deux fréquences précises : $f_1 = 1025$ Hz et $f_2 = 5800$ Hz. Elle souhaite que le spectre visualisé ne fasse pas apparaître de raies parasites pour ces deux fréquences.
- a) Quels paramètres d'analyse peuvent lui permettre cela (nombre d'échantillons et durée d'analyse) sachant qu'elle ne peut pas modifier la fréquence d'échantillonnage?

Question BONUS (1 point) : Pourquoi les signaux audio (CD audio) sont-ils classiquement enregistrés à une fréquence d'échantillonnage de 44 100 Hz?

Exercice 4 (7 points)

On considère un signal $x_a(t)$ défini comme ayant un spectre d'amplitude triangulaire centré (présenté sur la figure 3), de fréquence maximale $F = 40$ kHz et d'amplitude maximale A (on ne cherchera pas à expliciter l'expression de $x_a(t)$).

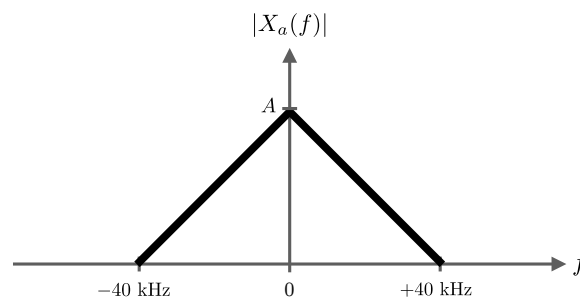


FIGURE 3 – Spectre d'amplitude du signal $x_a(t)$

Ce signal est multiplié par un signal cosinusoidal de fréquence $f_0 = 110$ kHz. De cette opération, qu'on appelle modulation d'amplitude, résulte le signal $x_m(t)$:

$$x_m(t) = x_a(t) \times \cos(2\pi f_0 t).$$

On désire transmettre ce signal modulé en l'échantillonnant et en transmettant les échantillons sous forme numérique.

- a) Calculer et représenter le spectre d'amplitude du signal analogique $x_m(t)$ (avant numérisation).
(aide : le calcul de $X_m(f)$ se fera grâce à l'utilisation du théorème de Plancherel; le spectre de $x_a(t)$ sera noté $X_a(f)$ et on ne cherchera pas à expliciter son expression)
- b) À partir du résultat de $X_m(f)$, déterminer le nombre minimal d'échantillons à transmettre par seconde afin de satisfaire le théorème de Shannon.
- c) Donner l'expression du signal échantillonné, que l'on pourra noter $x_{me}(t)$, et en déduire sa transformée de Fourier (notée $X_{me}(f)$) et représenter son spectre d'amplitude.
(aide : utilisez la formulation de l'échantillonnage à l'aide d'un peigne de Dirac et ne cherchez pas à expliciter x_{me} et X_{me})

Formulaire

Notation : tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = x + iy$$

où « x » et « y » sont des nombres réels et le nombre imaginaire est noté « i » tel que $i^2 = -1$.

Formules Trigo :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\cos(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

Définition de la convolution $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier : $x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi vt} dt$

※ Changement d'échelle :

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(v) \\ x(kt) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{v}{k}\right) \end{aligned}$$

※ Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(v)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-v)$

※ Décalage temporel : $x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(v)e^{-i2\pi vt_0}$

※ Dérivation :

◇ Par rapport au temps : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\text{TF}} (i2\pi v)^n X(v)$

◇ Par rapport à la fréquence : $t^n x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n X(v)}{dv^n} \frac{1}{(-i2\pi)^n}$

Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned}
 (\text{convolution}) \quad x(t) * y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(v) \cdot Y(v) \quad (\text{multiplication}) \\
 (\text{multiplication}) \quad x(t) \cdot y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(v) * Y(v) \quad (\text{convolution})
 \end{aligned}$$

Formules d'Euler

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
 \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
 \end{aligned}$$

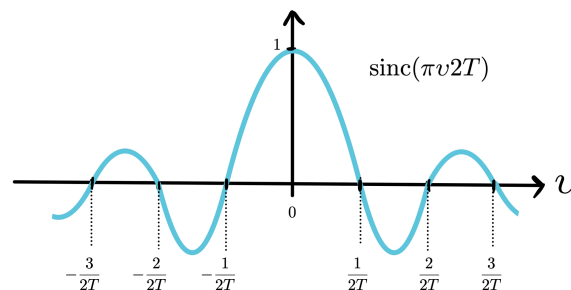
Quelques Transformées de Fourier utiles

$$\begin{aligned}
 e^{i2\pi v_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(v - v_0) \\
 \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi v t_0}
 \end{aligned}$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\text{TF}} X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

Fonction sinus cardinal : $\text{sinc}(\pi v 2T) = \frac{\sin(\pi v 2T)}{\pi v 2T}$

**Transformée de Fourier Discrète (TFD) :**

◇ Définition de la TFD :

$$X\left(v = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \equiv X(k) \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Périodique de période N en k (indice) donc de période v_e en v (fréquence)