TD 1
Traitement du Signal
Solutionnaire

Objectif

- se remettre en mémoire les principes pour calculer un produit de convolution de deux fonctions simples et classiques en traitement du signal

Rappel

- **Définition de la convolution** $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

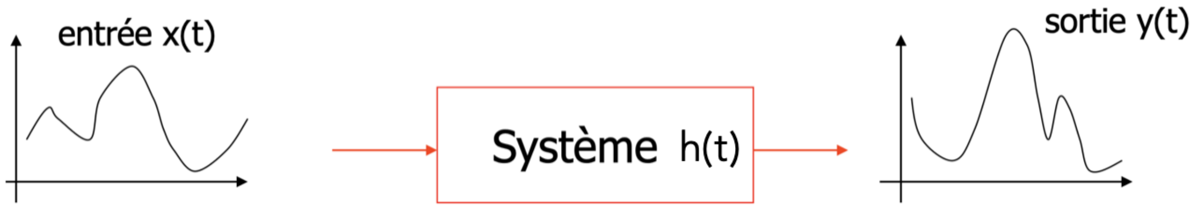


Figure 1 – Principe d'un filtrage.

Exercice 1

On considère les deux signaux $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$ définis sur la figure 2 et on appelle $y(t)$, le produit de convolution de ces signaux.

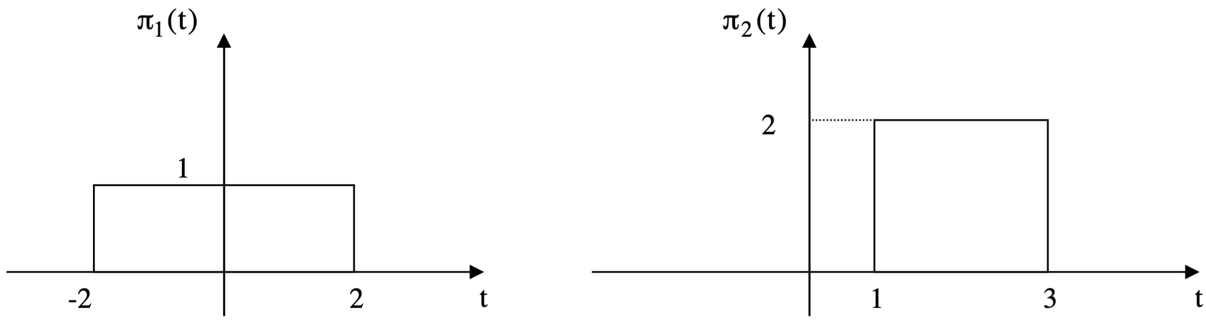


Figure 2 – les signaux $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$.

1. Écrire l'intégrale définissant la fonction $y(t)$.
2. Calculer complètement la fonction $y(t)$ en distinguant bien les différents cas.
3. Représenter $y(t)$

Réponse Q1 :

$$y(t) = \pi_1(t) * \pi_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1(t-u)\pi_2(u)du$$

Réponse Q2 :

- **cas 1 :** $t+2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad t < -1$
  $y(t) = 0$ car il n'y a pas de recouvrement entre les signaux.

- **cas 2 :** $1 \leqslant t+2 \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$

$$y(t) = \int_1^{t+2} 1 \times 2\, du = \Big[2u\Big]_1^{t+2} = 2(t+1)$$

- **cas 3 :** $t+2 \geqslant 3$ et $t-2 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant t \leqslant 3$

$$y(t) = \int_1^{3} 1 \times 2\, du = \Big[2u\Big]_1^{3} = 4$$

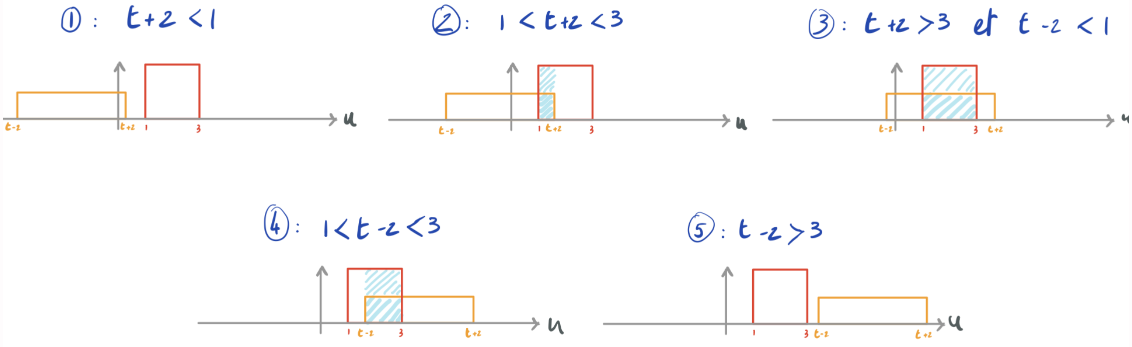
- **cas 4 :** $1 \leqslant t-2 \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leqslant t \leqslant 5$

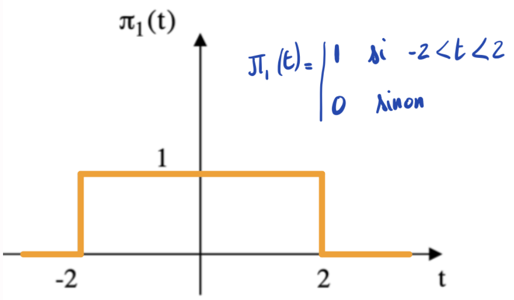
$$y(t) = \int_{t-2}^{3} 1 \times 2 \, du = \left[2u\right]_{t-2}^{3} = 2(5-t)$$

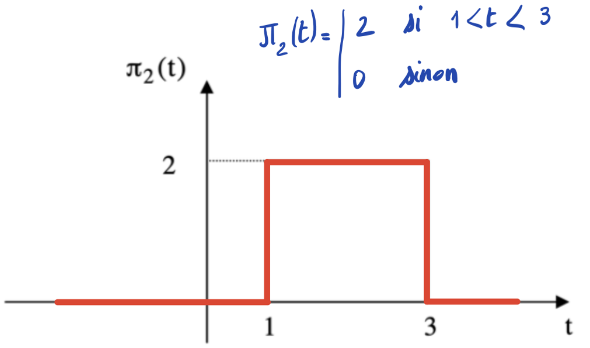
- **cas 5 :** $t - 2 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad t > 5$

  $y(t) = 0$ car pas de recouvrement entre les signaux.

Résumé des différents cas pour le calcul de $y(t)$ en choisissant arbitrairement la porte $\pi_1(t)$ à retourner et décaler, cette porte ayant pour bornes $[t-2, t+2]$

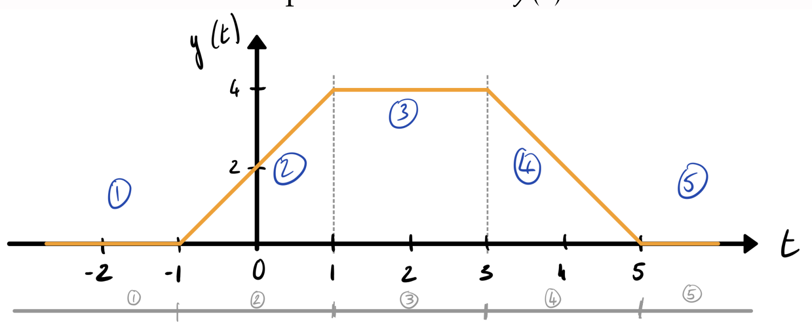






Réponse Q3 :

Représentation de $y(t)$



Exercice 2

On considère le système linéaire décrit par sa réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 4, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la sortie temporelle $s(t)$ du système pour l'entrée $e(t)$ ci-dessous :

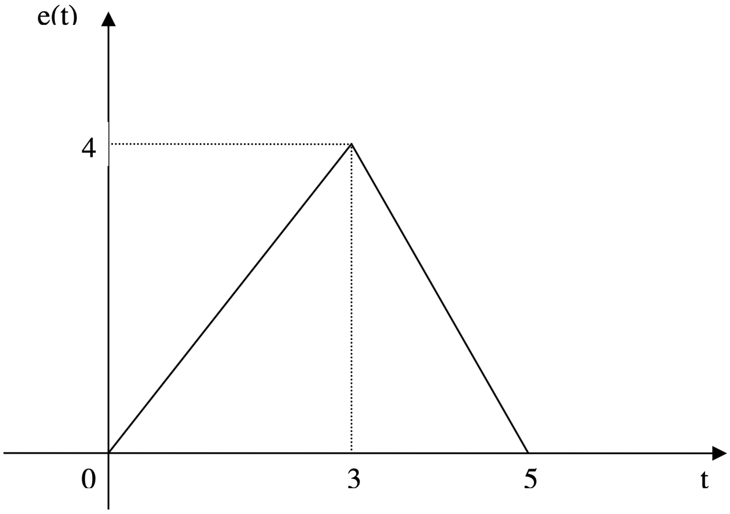


Figure 3 – Signal d'entrée e(t)

N.B : Seule la première intégrale non nulle sera calculée entièrement. Les autres seront simplement posées (bien préciser à chaque fois les bornes d'intégration et la fonction à intégrer).

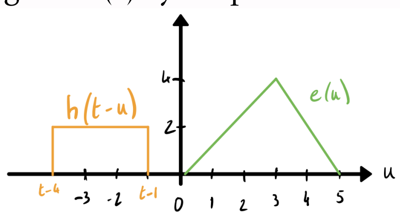
Réponse :

Réponse temporelle : $s(t) = e(t) * h(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)e(u)du$$

Décalage de $h(t)$ ayant pour bornes $[t-4;\ t-1]$

⇒ décalage de la porte h(u)



$$e(u) = \begin{cases} \frac{4}{3}u & \text{si } 0 < u < 3 \\ -2u+10 & \text{si } 3 < u < 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **cas 1 :** $t-1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < 1$

  $s(t) = 0$ car pas de recouvrement entre les signaux.

- **cas 2 :** $0 \leqslant t-1 \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

$$s(t) = \int_0^{t-1} 2 \times \frac{4}{3} u \, du = \left[\frac{4}{3}u^2\right]_0^{t-1} = \frac{4}{3}(t-1)^2$$

- **cas 3 :** $3 \leqslant t-1 \leqslant 5$ et $0 \leqslant t-4 \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leqslant t \leqslant 6$

$$s(t) = \int_{t-4}^{3} 2 \times \frac{4}{3} u \, du + \int_3^{t-1} 2 \times (-2u+10) \, du = [\ldots]_{t-4}^{3} + [\ldots]_3^{t-1}$$

- **cas 4 :** $2 \leqslant t-4 \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \leqslant t \leqslant 7$

$$s(t) = \int_{t-4}^{3} 2 \times \frac{4}{3} u \, du + \int_3^{5} 2 \times (-2u+10) \, du$$

- **cas 5 :** $3 \leqslant t-4 \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad 7 \leqslant t \leqslant 9$

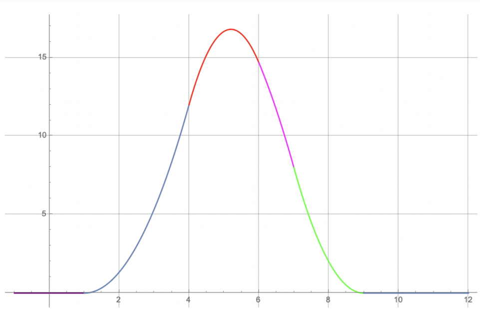
$$s(t) = \int_{t-4}^{5} 2 \times (-2u+10) \, du$$

- **cas 6 :** $t-4 > 5 \quad \Leftrightarrow \quad t > 9$

  $s(t) = 0$ car pas de recouvrement entre les signaux.

Au final, si on calcule toutes les intégrales :

$$s(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}(t-1)^2, & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 4, \\ -\frac{1}{3}(220-104t+10t^2), & \text{si } 4 \leqslant t \leqslant 6, \\ -\frac{1}{3}(4-32t-4t^2), & \text{si } 6 \leqslant t \leqslant 7, \\ 2(t-9)^2, & \text{si } 7 \leqslant t \leqslant 9, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$



Exercice 3

On considère le signal e(t) suivant :

$$e(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0,5 \leqslant t \leqslant 3,5, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

que l'on place en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle :

$$h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2k)$$

1. Calculer et représenter la sortie du filtre appellé $s_1(t)$.
2. Déduire simplement ce que serait la sortie $s_2(t)$ d'un filtre de réponse impulsionnelle :

$$h_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t - 2k),$$

   en entrée duquel on placerait le signal $e(t)$.

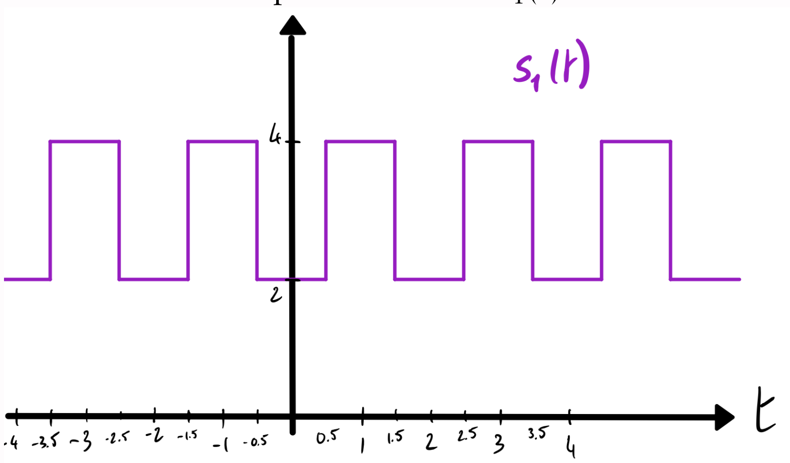
Réponse Q1 :

Réponse temporelle : $s_1(t) = e(t) * h_1(t)$

$$s_1(t) = e(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t - 2k)$$

Propriété : Convolution avec un peigne : périodise la fonction (décalage périodique)

Représentation de $s_1(t)$



Réponse Q2 :

Réponse temporelle : $s_2(t) = e(t) * h_2(t)$ avec

$$h_2(t) = s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t-2k)$$

La sortie $s_2(t)$ peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} s_2(t) \quad = e(t) * s_1(t) \quad &= e(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t-2k) \\ &= e(t) * e(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k) \\ &= \wedge(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \wedge(t-2k) \end{aligned}$$

où $\wedge(t)$ est une fonction triangle qui est le résultat de la convolution de deux portes identiques.