TD 2
Traitement du Signal

Objectifs

- Calculs de transformées de Fourier de fonctions usuelles
- Utilisation des propriétés de la transformée de Fourier

Rappel

- **Définition de la transformée de Fourier directe et inverse**

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i2\pi f t} dt$$
$$X(f) \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} TF^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\mathrm{e}^{+i2\pi f t} df$$

※ Dérivation par rapport au temps :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\text{TF}} (i2\pi f)^n X(f)$$

※ Dualité :

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad \text{alors} \quad X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

※ Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

※ Quelques transformées de Fourier utiles

$$\mathrm{e}^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0)$$
$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} \mathrm{e}^{-i2\pi f t_0}$$

- **Théorème de Plancherel**

$$\text{(convolution)} \quad x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f).Y(f) \quad \text{(multiplication)}$$
$$\text{(multiplication)} \quad x(t).y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \quad \text{(convolution)}$$

- **Formule d'Euler**

$$\cos(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)}{2i}$$

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ représenté sur la figure 1 suivante :

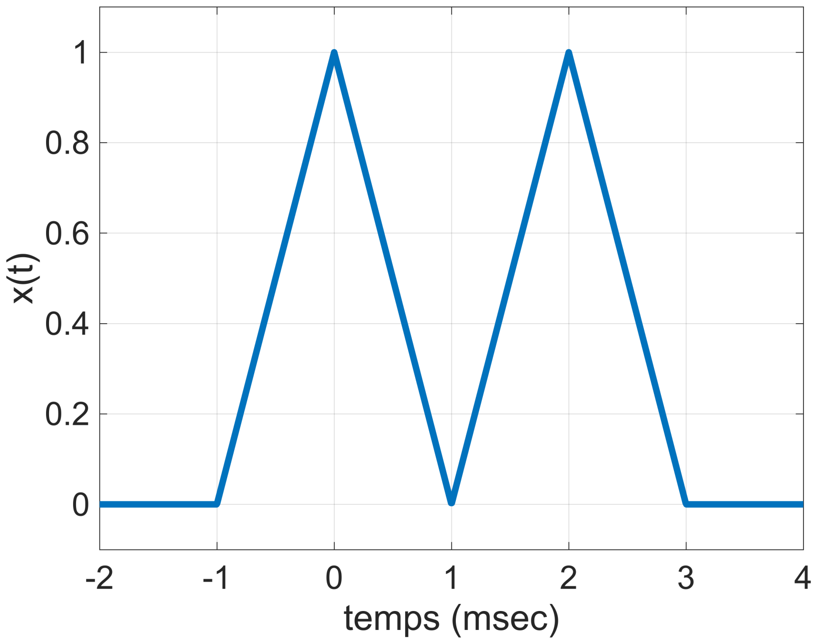

FIGURE 1 – Représentation du signal $x(t)$.

1. Justifier pourquoi la transformée de Fourier de $x(t)$ existe.
2. Sans calculer explicitement la transformée de Fourier de $x(t)$,
   (a) Trouver $X(0)$
   (b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$
   (c) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi f}df$
   (d) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

Exercice 2

Soient les signaux :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \operatorname{sinc}\left(8\pi 10^3 t\right) * \Pi_{[-3{,}75.10^{-4};\ 3{,}75.10^{-4}]} \\
x_2(t) &= \operatorname{sinc}\left(76\pi 10^3 t\right) * \Pi_{[-2{,}63.10^{-5};\ 2{,}63.10^{-5}]}.
\end{aligned}
$$

où le signe « $*$ » correspond à l'operation de convolution.

Nous souhaitons calculer la transformée de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$, pour cela nous allons décomposer ce calcul par étapes.

1. Calculer et représenter la transformée de Fourier d'une porte centrée $\Pi_{[-T;\ T]}$ de deux manières différentes ((a) calcul direct en utilisant la définition de la TF et (b) en utilisant des propriétés de la TF).

2. Calculer et représenter la transformée de Fourier d'un sinus cardinal $\operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)$.

3. Déduire les transformées de Fourier (spectres) de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ et les représenter.

4. On crée ensuite le signal :

$$x(t) = x_1\left(t + 3,75.10^{-4}\right) + x_2\left(t - 2,63.10^{-5}\right)$$

que l'on place en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - 8,026.10^{-4} k\right)$$

Calculer et représenter la sortie $y(t)$ du filtre.

5. Si l'on place uniquement $x_1(t)$ en entrée du filtre $h(t)$. Déterminer et représenter le spectre de la sortie du filtre.