TD 2
Traitement du Signal
Solutionnaire

Objectifs

- Calculs de transformées de Fourier de fonctions usuelles
- Utilisation des propriétés de la transformée de Fourier

Rappel

- **Définition de la transformée de Fourier directe et inverse**

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i2\pi f t}dt$$
$$X(f) \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} TF^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\mathrm{e}^{+i2\pi f t}df$$

※ Dérivation par rapport au temps :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\text{TF}} (i2\pi f)^n X(f)$$

※ Dualité :

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad \text{alors} \quad X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

※ Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

※ Quelques transformées de Fourier utiles

$$\mathrm{e}^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0)$$
$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} \mathrm{e}^{-i2\pi f t_0}$$

- **Théorème de Plancherel**

$$\text{(convolution)} \quad x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f).Y(f) \quad \text{(multiplication)}$$
$$\text{(multiplication)} \quad x(t).y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \quad \text{(convolution)}$$

- **Formule d'Euler**

$$\cos(x) = \frac{(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})}{2i}$$

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ représenté sur la figure 1 suivante :

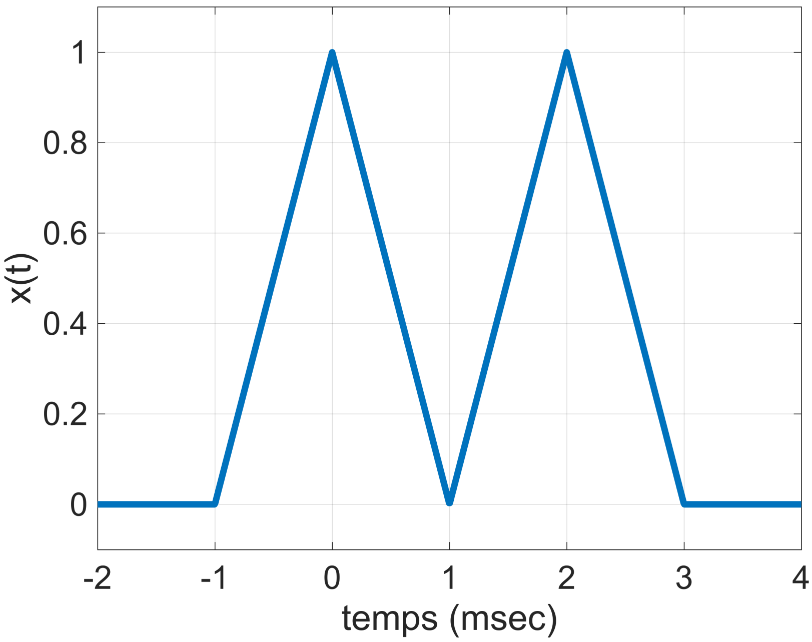


Figure 1 – Représentation du signal $x(t)$.

1. Justifier pourquoi la transformée de Fourier de $x(t)$ existe.
2. Sans calculer explicitement la transformée de Fourier de $x(t)$,
   (a) Trouver $X(0)$
   (b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$
   (c) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi f}df$
   (d) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

Réponse Q1 :

Pour qu'une TF existe, l'énergie du signal doit être finie : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$.
Le signal est « borné » en temps, son amplitude est finie, son énergie est donc finie.
$\Rightarrow$ la TF existe.

Réponse Q2 :

(a) $X(0) = X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi(f=0)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 2$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\mathrm{e}^{+i2\pi f(t=0)}df = x(t=0) = 1$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\mathrm{e}^{+i2\pi f}df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\mathrm{e}^{+i2\pi f(t=1)}df = x(t=1) = 0$

(d) Utilisation du théorème de Parseval (*l'énergie ne dépend pas de la représentation*) :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Le signal $x(t)$ peut être décrit sous la forme :

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 1-t, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t-1, & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 3-t, & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi calculer $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^{0} (t+1)^2 \, dt + \int_{0}^{1} (1-t)^2 \, dt + \int_{1}^{2} (t-1)^2 \, dt + \int_{2}^{3} (3-t)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2

Soient les signaux :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \text{sinc}\left(8\pi 10^3 t\right) * \Pi_{[-3{,}75.10^{-4};\ 3{,}75.10^{-4}]} \\ x_2(t) &= \text{sinc}\left(76\pi 10^3 t\right) * \Pi_{[-2{,}63.10^{-5};\ 2{,}63.10^{-5}]}. \end{aligned}$$

où le signe « $*$ » correspond à l'operation de convolution.

Nous souhaitons calculer la transformée de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$, pour cela nous allons décomposer ce calcul par étapes.

1. Calculer et représenter la transformée de Fourier d'une porte centrée $\Pi_{[-T;\ T]}$ de deux manières différentes ((a) calcul direct en utilisant la définition de la TF et (b) en utilisant des propriétés de la TF).

2. Calculer et représenter la transformée de Fourier d'un sinus cardinal $\text{sinc}(2\pi f_0 t)$.

3. Déduire les transformées de Fourier (spectres) de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ et les représenter.

4. On crée ensuite le signal :

$$x(t) = x_1\left(t + 3,75.10^{-4}\right) + x_2\left(t - 2,63.10^{-5}\right)$$

que l'on place en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - 8,026.10^{-4}k\right)$$

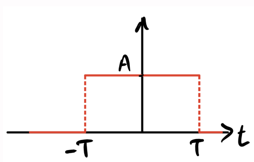
Calculer et représenter la sortie $y(t)$ du filtre.

5. Si l'on place uniquement $x_1(t)$ en entrée du filtre $h(t)$. Déterminer et représenter le spectre de la sortie du filtre.

Réponse Q1 :

(a) **Calcul direct de la TF d'une porte centrée :**

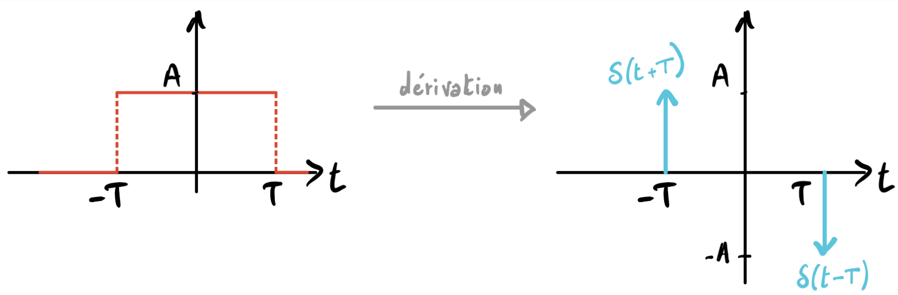
$$\Pi_{[-T,T]}(t) = \begin{cases} A, & \text{si } -T \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
TF\left[\Pi_{[-T;\,T]}(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{[-T;\,T]} e^{-i2\pi f t} dt \\
&= \int_{-T}^{+T} A e^{-i2\pi f t} dt = A\left[\frac{e^{-i2\pi f t}}{-i2\pi f}\right]_{-T}^{+T} \\
&= A\frac{e^{+i2\pi f T} - e^{-i2\pi f T}}{i2\pi f} = \frac{A sin(2T\pi f)}{\pi f} \\
&= \frac{2T}{2T} \times \frac{A sin(2T\pi f)}{\pi f} = \frac{2TA sin(2T\pi f)}{2T\pi f} \\
&= 2TA\,\mathrm{sinc}(2T\pi f)
\end{aligned}$$

(b) **Calcul en utilisant des propriétés de la TF pour une porte centrée :**

propriété de dérivation : $TF[x(t)] = TF\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]\frac{1}{(i2\pi f)^n}$



$$x(t) = \begin{cases} A, & \text{si } -T \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

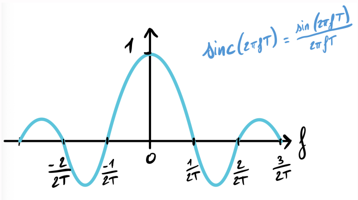
Après dérivation en fonction du temps :

$$\dot{x}(t) = A\delta(t+T) - A\delta(t-T) = \begin{cases} A, & \text{si } t = -T, \\ -A, & \text{si } t = T. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
TF[\dot{x}(t)] &= TF[A\delta(t+T)] - TF[A\delta(t-T)] \\
&= Ae^{+i2\pi f T} - Ae^{-i2\pi f T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TF[x(t)] &= TF[\dot{x}(t)]\frac{1}{i2\pi f} = \frac{A}{\pi f}\frac{e^{+i2\pi f T} - e^{-i2\pi f T}}{2i} \\
&= \frac{A}{\pi f}\sin(2\pi f T) \times \frac{2T}{2T} = 2TA\frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} \\
&= 2TA\,\mathrm{sinc}(2T\pi f)
\end{aligned}$$

Rappel sur le sinus cardinal (sinc)



sinc(0) = 1
sinc$(2\pi f T) = 0$?
$\hookrightarrow$ la fonction sinus s'annule tous les "πk"
$\hookrightarrow$ $2\pi f T = \pi k \Leftarrow$ la fonction sinc s'annule en $f = \frac{k}{2T}$

Réponse Q2 :

- **TF d'un sinus cardinal** sinc$(2\pi f_0 t)$:

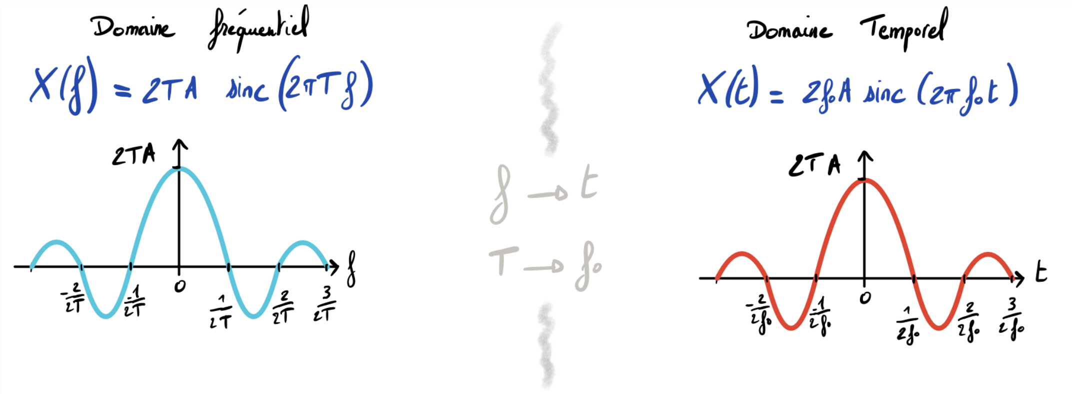
En utilisant la propriété de dualité de la TF :

$$TF[x(t)] = X(f) \text{ alors } TF[X(t)] = x(-f)$$

et connaissant :

$$\begin{aligned} TF[x(t)] &= X(f) \\ TF\left[\Pi_{[-T;\,T]}(t)\right] &= 2TA\ \mathrm{sinc}(2T\pi f), \end{aligned}$$

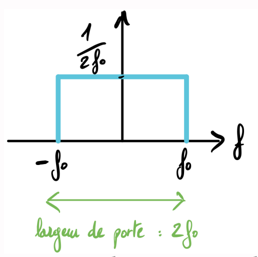
il reste à déduire $TF[X(t)] = x(-f)$. À partir de $X(f)$, définissons $X(t)$:



$$TF[2f_0 A\ \mathrm{sinc}(2f_0\pi t)] = A\Pi_{[-f_0;\,f_0]}(-f) = A\Pi_{[-f_0;\,f_0]}(f) \quad (\textit{car } \Pi_{[-f_0;\,f_0]} \textit{ est paire})$$

Donc

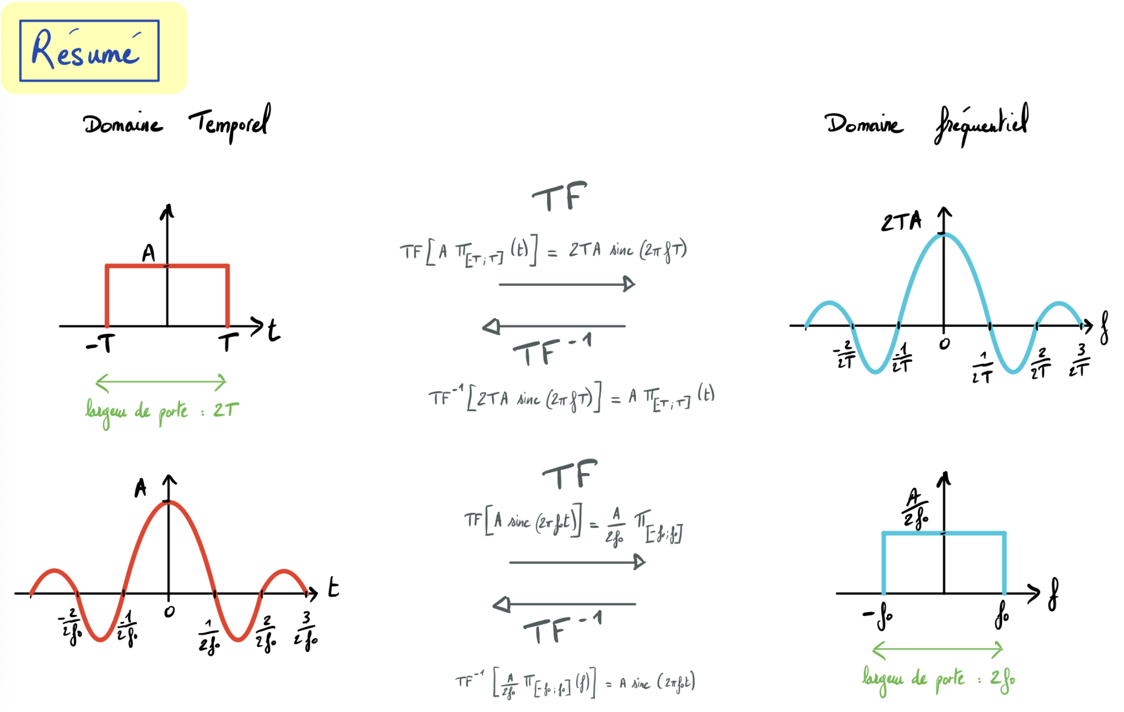
$$TF[\mathrm{sinc}(2f_0\pi t)] = \frac{1}{2f_0}\Pi_{[-f_0;\,f_0]}(f)$$



Une autre méthode pour prouver ce résultat est de partir d'un porte centrée d'amplitude A dans le domaine fréquentiel : $\Pi_{[-f_0;\,f_0]}(f)$ et de calculer sa transformée de Fourier inverse (par le calcul de l'intégrale) :

$$\begin{aligned} TF^{-1}[\Pi_{[-f_0;\,f_0]}(f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{[-f_0;\,f_0]}(f) e^{+i2\pi f t} df = \int_{-f_0}^{+f_0} A e^{+i2\pi f t} df = \ldots \\ &= 2f_0 A\mathrm{sinc}(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Donc $TF\left[\mathrm{sinc}(2f_0\pi t)\right] = \frac{1}{2f_0}\Pi_{[-f_0;\ f_0]}(f)$



Réponse Q3 :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= A_1\mathrm{sinc}(2\pi f_1 t) * \Pi_{[-t_1;\ t_1]}(t) \\
x_2(t) &= A_2\mathrm{sinc}(2\pi f_2 t) * \Pi_{[-t_2;\ t_2]}(t)
\end{aligned}
$$

avec $f_1 = 4$ kHz ; $f_2 = 38$ kHz ; $t_1 = 3{,}75.10^{-4}$ s ; $t_2 = 2{,}63.10^{-5}$ s ; $A_1 = A_2 = 1$.

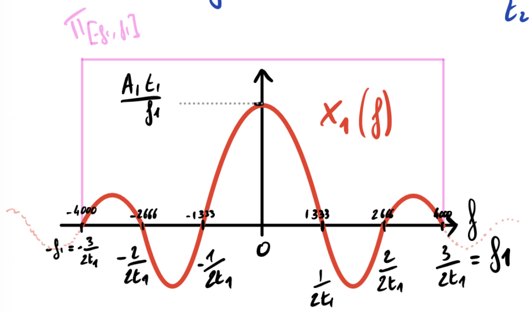
<u>Théorème de Plancherel :</u>

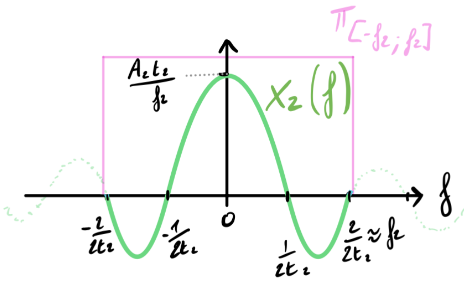
$$
\begin{aligned}
TF[x(t) * y(t)] &= TF[x(t)].TF[y(t)] &= X(f).Y(f) \\
TF[x(t).y(t)] &= TF[x(t)] * TF[y(t)] &= X(f) * Y(f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
TF[x_1(t)] &= TF\left[A_1\mathrm{sinc}(2\pi f_1 t)\right].TF\left[\Pi_{[-t_1;\ t_1]}(t)\right] \\
&= \frac{A_1 t_1}{f_1}\Pi_{[-f_1;\ f_1]}(f).\mathrm{sinc}(2\pi f t_1) \\
TF[x_2(t)] &= TF\left[A_2\mathrm{sinc}(2\pi f_2 t)\right].TF\left[\Pi_{[-t_2;\ t_2]}(t)\right] \\
&= \frac{A_2 t_2}{f_2}\Pi_{[-f_2;\ f_2]}(f).\mathrm{sinc}(2\pi f t_2)
\end{aligned}
$$

Représentation : $f_1 = 4$ kHz ; $\frac{1}{t_1} = 2.67$ kHz

$f_2 = 38$ kHz ; $\frac{1}{t_2} = 38,02$ kHz





Réponse Q4 :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_1(t+t_1) + x_2(t-t_2) \\
h(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 8,026.10^{-4}k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_3 k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) = x_1(t+t_1) * h(t) + x_2(t-t_2) * h(t) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\delta(t-t_3k) * x_1(t+t_1) + \delta(t-t_3k) * x_2(t-t_2)\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[x_1(t+t_1-t_3k) + x_2(t-t_2-t_3k)\right]
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $y(t)$ est la périodisation de x_1 et x_2

Réponse Q5 :

<u>TF d'un peigne de Dirac :</u>

$$
TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)
$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x_1(t) \\
Y(f) &= H(f).X_1(f) \\
&= TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kt_3)\right].X_1(f) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t_3}\delta(f - \frac{k}{t_3}).X_1(f)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La périodisation du signal temporel revient à faire un <u>échantillonnage du spectre</u>, et à ne prendre qu'une valeur tous les $\frac{1}{t_3}$ Hz. (*Attention : un facteur* $\frac{1}{t_3}$ *doit aussi être appliqué sur l'amplitude (non représenté ici)*)