TD 3
Traitement du Signal

Objectifs

- Calculs de transformées de Fourier de fonctions usuelles
- Utilisation des propriétés de la transformée de Fourier
- Effet sur le spectre d'un échantillonnage

Rappel

- **Quelques transformées de Fourier utiles**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$e^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0}$$

- **Théorème de Plancherel**

$$\text{(convolution)} \quad x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f).Y(f) \quad \text{(multiplication)}$$

$$\text{(multiplication)} \quad x(t).y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \quad \text{(convolution)}$$

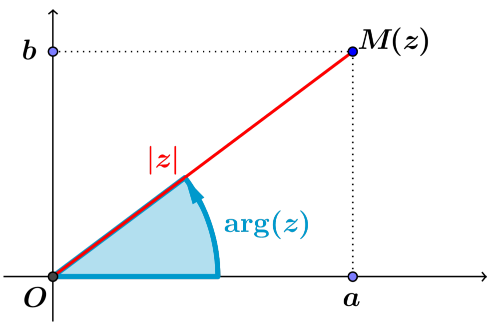
- **Formule d'Euler**

$$\cos(x) = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{2i}$$

- **Nombre complexe**
  Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : $z = a + ib$ où « a » et« b » sont des nombres réels et le nombre imaginaire est noté « i » tel que $i^2 = -1$.

  Module : $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;
  Argument : $\arg(z) = \arctan(b/a)$.



Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ où $|z| = r$, $\arg(z) = \arg(re^{i\theta}) = \theta$
Propriétés utiles en calcul : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$; $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \sin(31,42t + 0,4)$$

1. Ce signal est-il d'énergie ou de puissance finie ?
2. Quelle est la fréquence f_1 du signal x(t) ?
3. Quelle est la valeur du paramètre t_0 permettant de mettre $x(t)$ sous la forme $x(t) = \sin(2\pi f_1(t - t_0))$?
4. Quelle est l'expression du spectre d'amplitude (module) de $x(t)$? Le représenter
5. Quelle est l'expression du spectre de phase (argument) de $x(t)$? Le représenter

Exercice 2

Soit un signal continu $x(t)$ en entrée de cette chaine de traitement :

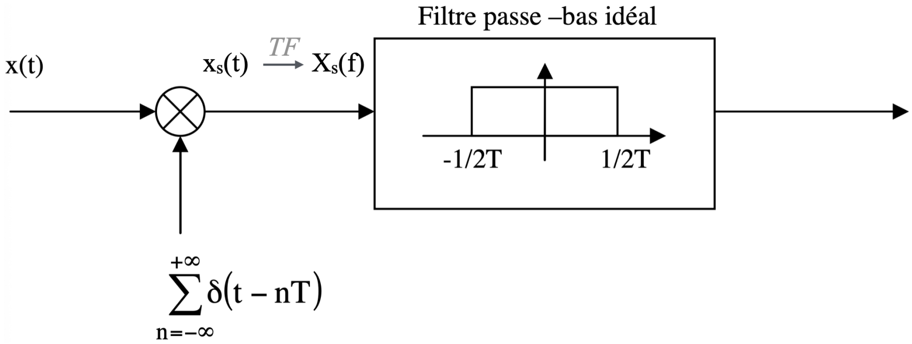


FIGURE 1 – Représentation de la chaine de traitement du signal $x(t)$.

1. Donner l'expression de la transformée de Fourier du signal $x_s(t)$ en entrée du filtre passe-bas en fonction de celle de $x(t)$.
2. On suppose que la transformée de Fourier de $x(t)$ est :

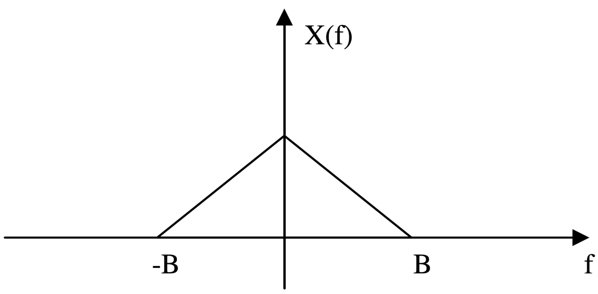


FIGURE 2 – Représentation de la transformée de Fourier du signal $x(t)$.

Représenter $X_s(f)$ dans les cas où $T = \frac{1}{4B}$, $T = \frac{1}{2B}$ et $T = \frac{1}{B}$ et expliquer le phénomène observé.

3. Pour les trois cas ci-dessus, représenter la transformée de Fourier du signal en sortie du filtre passe-bas.
4. Pour quelle valeur maximale de T retrouve-t-on en sortie du filtre le signal $X(f)$?

Exercice 3

Soit le signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos^2(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$$

où A_1 est une constante réelle positive et A_0 une constante réelle négative telle que $|A_0| > A_1$.

1. Déterminer l'expression du spectre de $x(t)$
2. Quelle est l'expression du spectre d'amplitude (module) ? Le représenter
3. Quelle est l'expression du spectre de phase (argument) ? Le représenter
4. Déterminer de façon simple la puissance de $x(t)$