

TD 3

Traitement du Signal

Solutionnaire

Objectifs

- Calculs de transformées de Fourier de fonctions usuelles
- Utilisation des propriétés de la transformée de Fourier
- Effet sur le spectre d'un échantillonnage

Rappel

- Quelques transformées de Fourier utiles

$$\begin{aligned}
 x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\
 e^{i2\pi f_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0) \\
 \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0}
 \end{aligned}$$

- Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned}
 (\text{convolution}) \quad x(t) * y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot Y(f) \quad (\text{multiplication}) \\
 (\text{multiplication}) \quad x(t) \cdot y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \quad (\text{convolution})
 \end{aligned}$$

- Formule d'Euler

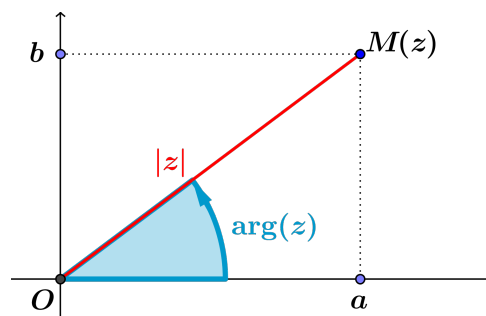
$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
 \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
 \end{aligned}$$

- Nombre complexe

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : $z = a + ib$ où « a » et « b » sont des nombres réels et le nombre imaginaire est noté « i » tel que $i^2 = -1$.

Module : $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

Argument : $\arg(z) = \arctan(b/a)$.



Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ où $|z| = r$, $\arg(z) = \arg(re^{i\theta}) = \theta$

Propriétés utiles en calcul : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$; $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Exercice 1

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \sin(31,42t + 0,4)$$

1. Ce signal est-il d'énergie ou de puissance finie ?
2. Quelle est la fréquence f_1 du signal $x(t)$?
3. Quelle est la valeur du paramètre t_0 permettant de mettre $x(t)$ sous la forme $x(t) = \sin(2\pi f_1(t - t_0))$?
4. Quelle est l'expression du spectre d'amplitude (module) de $x(t)$? Le représenter
5. Quelle est l'expression du spectre de phase (argument) de $x(t)$? Le représenter

Réponse Q1 :

Le signal $x(t)$ est un signal périodique, il est par définition d'énergie infinie et de puissance finie.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \xrightarrow{\text{signal périodique}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Réponse Q2 :

$$2\pi f_1 = 31,42 \Rightarrow f_1 = \frac{31,42}{2\pi} \approx 5 \text{ Hz}$$

Réponse Q3 :

Par identification : $x(t) = \sin(31,42t + 0,4) \rightarrow \sin(2\pi f_1(t - t_0))$

$$31,42t + 0,4 = 2\pi f_1 \left(t + \frac{0,4}{2\pi f_1} \right) = 2\pi f_1 \left(t - \left(\frac{-0,4}{2\pi f_1} \right) \right) = 2\pi f_1 (t - t_0)$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{-0,4}{2\pi f_1} = \frac{-0,4}{2\pi \cdot 5} = -0,013 \text{ s}$$

Réponses Q4 - Q5 :

Calcul du spectre $X(f)$

$$\begin{aligned}
 TF[x(t)] = X(f) &= TF[\sin(2\pi f_1(t - t_0))] \\
 &= TF\left[\frac{e^{-i2\pi f_1 t_0} e^{+i2\pi f_1 t} - e^{+i2\pi f_1 t_0} e^{-i2\pi f_1 t}}{2i}\right] \\
 &= \frac{i}{i} \times \frac{1}{2i} [e^{-i2\pi f_1 t_0} \delta(f - f_1) - e^{+i2\pi f_1 t_0} \delta(f + f_1)] \\
 X(f) &= \frac{-i}{2} [e^{-i2\pi f_1 t_0} \delta(f - f_1) - e^{+i2\pi f_1 t_0} \delta(f + f_1)]
 \end{aligned}$$

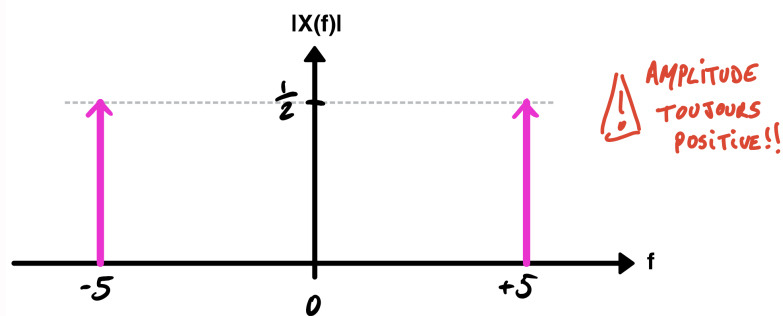
en posant $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$X(f) = \frac{1}{2} e^{(-i2\pi f_1 t_0 - i\frac{\pi}{2})} \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} e^{(+i2\pi f_1 t_0 + i\frac{\pi}{2})} \delta(f + f_1)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} e^{i(-2\pi f_1 t_0 - \frac{\pi}{2})} \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} e^{i(2\pi f_1 t_0 + \frac{\pi}{2})} \delta(f + f_1)$$

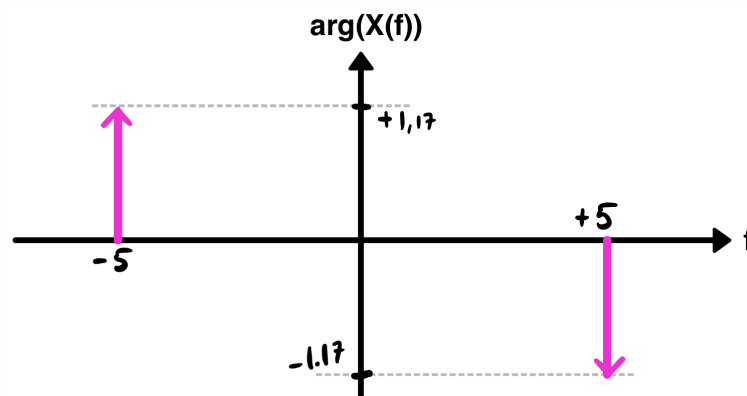
Calcul du spectre d'amplitude (module) $|X(f)|$

$$|X(f)| = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] = \frac{1}{2} [\delta(f - 5) + \delta(f + 5)]$$



Calcul du spectre de phase (argument) $\arg(X(f))$

$$\begin{aligned}
 \arg(X(f)) &= \left(-2\pi f_1 t_0 - \frac{\pi}{2}\right) \delta(f - f_1) + \left(2\pi f_1 t_0 + \frac{\pi}{2}\right) \delta(f + f_1) \\
 &= -1,17 \delta(f - 5) + 1,17 \delta(f + 5)
 \end{aligned}$$



Réponses Q4 - Q5 : Méthode alternative

$$\sin(2\pi f_1(t - t_0)) = \sin(2\pi f_1 t) * \delta(t - t_0)$$

Calcul du spectre $X(f)$

$$\begin{aligned} TF[x(t)] = X(f) &= TF[\sin(2\pi f_1(t - t_0))] = TF[\sin(2\pi f_1 t)] \cdot TF[\delta(t - t_0)] \\ &= TF\left[\frac{e^{+i2\pi f_1 t} - e^{-i2\pi f_1 t}}{2i}\right] e^{-i2\pi t_0 f} \\ &= \frac{i}{i} \times \frac{1}{2i} \left[e^{-i2\pi t_0 f} \delta(f - f_1) - e^{-i2\pi t_0 f} \delta(f + f_1) \right] \\ X(f) &= \frac{i}{2} \left[e^{-i2\pi t_0 f} \delta(f + f_1) - e^{-i2\pi t_0 f} \delta(f - f_1) \right] \end{aligned}$$

Utilisation de la propriété du Dirac :

$$\begin{aligned} X(f) \cdot \delta(f - f_0) &= X(f_0) \cdot \delta(f - f_0) \\ X(f) \cdot \delta(f + f_0) &= X(-f_0) \cdot \delta(f + f_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-i2\pi t_0 f} \cdot \delta(f - f_1) &= e^{-i2\pi t_0 f_1} \cdot \delta(f - f_1) \\ e^{-i2\pi t_0 f} \cdot \delta(f + f_1) &= e^{+i2\pi t_0 f_1} \cdot \delta(f + f_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{i}{2} \left[e^{-i2\pi t_0 f} \cdot \delta(f + f_1) - e^{-i2\pi t_0 f} \cdot \delta(f - f_1) \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[e^{+i2\pi t_0 f_1} \cdot \delta(f + f_1) - e^{-i2\pi t_0 f_1} \cdot \delta(f - f_1) \right] \end{aligned}$$

en posant $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$X(f) = \frac{1}{2} \left[e^{+i2\pi t_0 f_1 + i\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(f + f_1) + e^{-i2\pi t_0 f_1 - i\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(f - f_1) \right]$$

$$X(f) = \frac{1}{2} e^{i(2\pi t_0 f_1 + \frac{\pi}{2})} \cdot \delta(f + f_1) + \frac{1}{2} e^{i(-2\pi t_0 f_1 - \frac{\pi}{2})} \cdot \delta(f - f_1)$$

Exercice 2

Soit un signal continu $x(t)$ en entrée de cette chaîne de traitement :

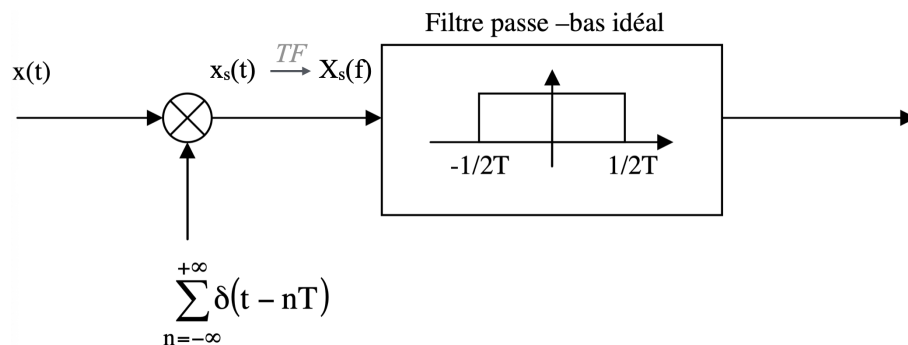


FIGURE 1 – Représentation de la chaîne de traitement du signal $x(t)$.

1. Donner l'expression de la transformée de Fourier du signal $x_s(t)$ en entrée du filtre passe-bas en fonction de celle de $x(t)$.
2. On suppose que la transformée de Fourier de $x(t)$ est :

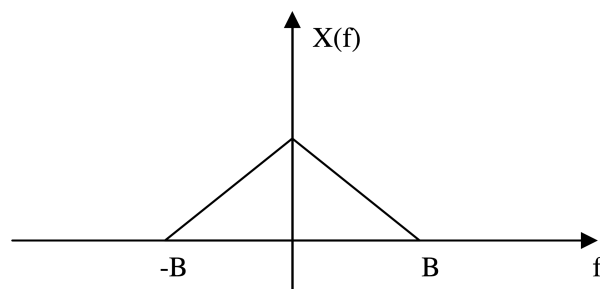


FIGURE 2 – Représentation de la transformée de Fourier du signal $x(t)$.

Représenter $X_s(f)$ dans les cas où $T = \frac{1}{4B}$, $T = \frac{1}{2B}$ et $T = \frac{1}{B}$ et expliquer le phénomène observé.

3. Pour les trois cas ci-dessus, représenter la transformée de Fourier du signal en sortie du filtre passe-bas.
4. Pour quelle valeur maximale de T retrouve-t-on en sortie du filtre le signal $X(f)$?

Réponse Q1 :

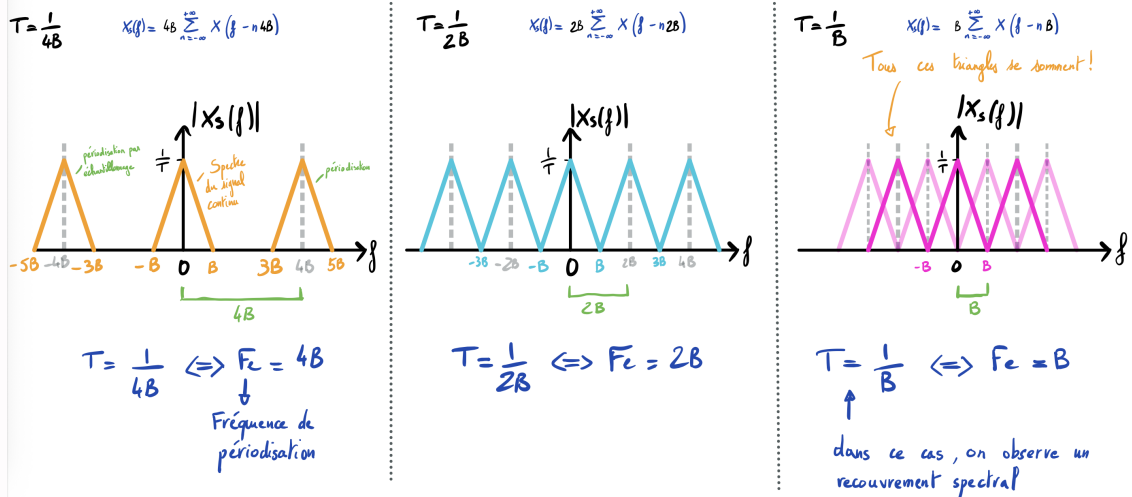
$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$X_s(f) = TF \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right]$$

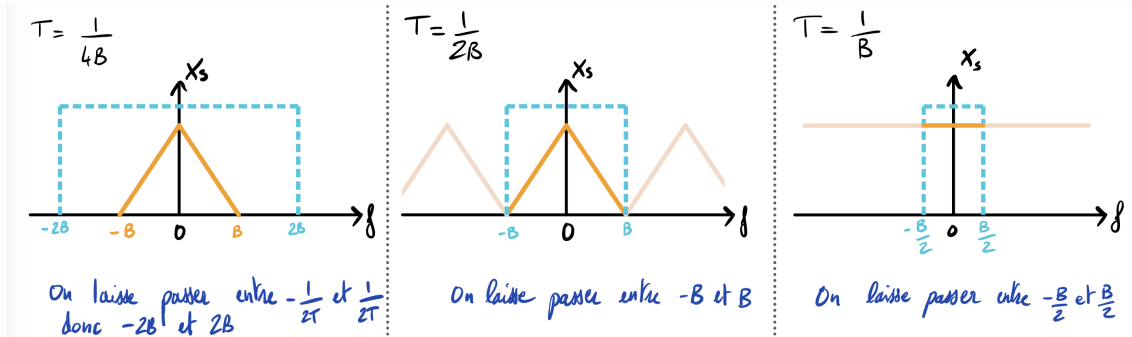
$$= X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta \left(f - \frac{n}{T} \right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X \left(f - \frac{n}{T} \right) \Rightarrow \text{périodisation du spectre tous les } F_e = \frac{1}{T}$$

Réponse Q2 :



Réponse Q3 :



Réponse Q4 :

Il faut $T \leq \frac{1}{2B}$ pour retrouver en sortie le signal original.

$$\underbrace{F_e}_{\frac{1}{T}} \geq 2 \underbrace{F_{max}}_B \quad \Leftarrow \quad \text{Critère de Shannon}$$

avec F_e : fréquence d'échantillonnage et F_{max} : fréquence maximale du signal.

Exercice 3

Soit le signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos^2(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$$

où A_1 est une constante réelle positive et A_0 une constante réelle négative telle que $|A_0| > A_1$.

1. Déterminer l'expression du spectre de $x(t)$
2. Quelle est l'expression du spectre d'amplitude (module)? Le représenter
3. Quelle est l'expression du spectre de phase (argument)? Le représenter
4. Déterminer de façon simple la puissance de $x(t)$

Réponse Q1 :

Utilisation de : $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cos^2(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) \\ &= A_0 + \frac{A_1}{2} [1 + \cos(8\pi f_0 t + 4\varphi_0)] \end{aligned}$$

Calculons d'abord :

$$\begin{aligned} TF[\cos(8\pi f_0 t + 4\varphi_0)] &= TF\left[\frac{1}{2}\left(e^{+i2\pi 4f_0 t + i4\varphi_0} + e^{-i2\pi 4f_0 t - i4\varphi_0}\right)\right] \\ &= TF\left[\frac{1}{2}\left(e^{+2i\pi 4f_0 t} e^{+i4\varphi_0} + e^{-2i\pi 4f_0 t} e^{-i4\varphi_0}\right)\right] \\ &= \frac{e^{+i4\varphi_0}}{2} TF[e^{+2i\pi 4f_0 t}] + \frac{e^{-i4\varphi_0}}{2} TF[e^{-2i\pi 4f_0 t}] \\ &= \frac{e^{+i4\varphi_0}}{2} \delta(f - 4f_0) + \frac{e^{-i4\varphi_0}}{2} \delta(f + 4f_0) \end{aligned}$$

$$TF\left[A_0 + \frac{A_1}{2}\right] = \left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right) \delta(f)$$

Au final :

$$X(f) = \left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right) \delta(f) + \frac{A_1}{4} \left[\delta(f - 4f_0) e^{+i4\varphi_0} + \delta(f + 4f_0) e^{-i4\varphi_0}\right].$$

Sachant que d'après l'énoncé, A_1 est une constante réelle positive et A_0 une constante réelle négative telle que $|A_0| > A_1$.

Nous pouvons en déduire que :

- $\left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \left|A_0 + \frac{A_1}{2}\right| = -\left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right)$
- $\left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \arg(\Re < 0) = \pi \Rightarrow \left|A_0 + \frac{A_1}{2}\right| e^{i\pi}$

$$\bullet \frac{A_1}{4} > 0 \Rightarrow \arg(\Re > 0) = 0 \Rightarrow \left| \frac{A_1}{4} \right| e^{i0}$$

et remplacer ces expressions dans l'équation du spectre $X(f)$:

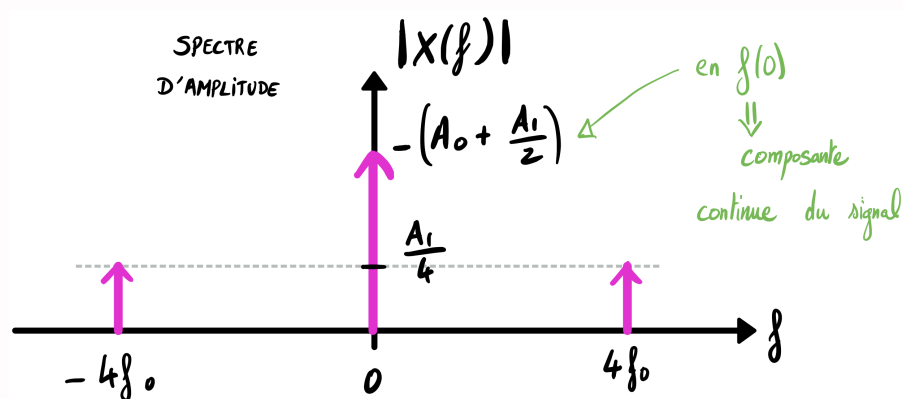
$$X(f) = \left| A_0 + \frac{A_1}{2} \right| e^{i\pi} \delta(f) + \left| \frac{A_1}{4} \right| e^{i0} e^{+i4\varphi_0} \delta(f - 4f_0) + \left| \frac{A_1}{4} \right| e^{i0} e^{-i4\varphi_0} \delta(f + 4f_0)$$

$$X(f) = \left| A_0 + \frac{A_1}{2} \right| e^{i\pi} \delta(f) + \left| \frac{A_1}{4} \right| e^{i(+4\varphi_0)} \delta(f - 4f_0) + \left| \frac{A_1}{4} \right| e^{i(-4\varphi_0)} \delta(f + 4f_0)$$

Réponse Q2 :

Spectre d'amplitude (module) : $|X(f)|$

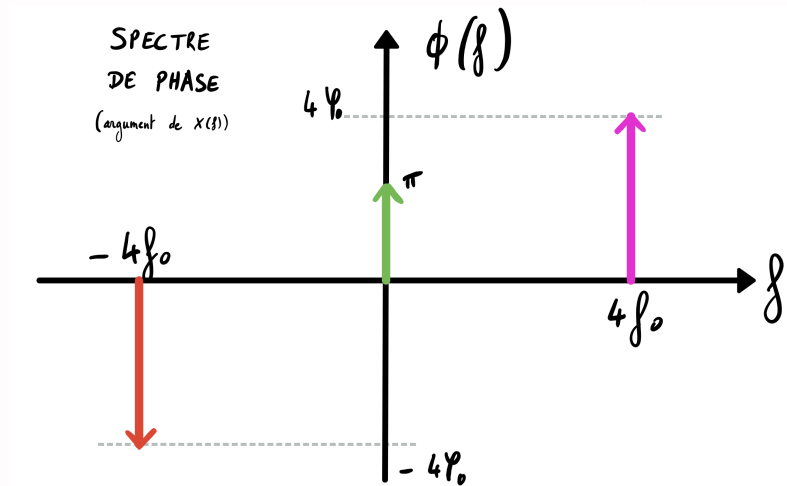
$$|X(f)| = \left| A_0 + \frac{A_1}{2} \right| \delta(f) + \left| \frac{A_1}{4} \right| \delta(f - 4f_0) + \left| \frac{A_1}{4} \right| \delta(f + 4f_0)$$



Réponse Q3 :

Spectre de phase (argument) : $\arg(X(f)) = \phi(f)$

$$\arg(X(f)) = \phi(f) = \pi \delta(f) + 4\varphi_0 \delta(f - 4f_0) - 4\varphi_0 \delta(f + 4f_0)$$



Réponse Q4 :

Rappel de la forme générale d'un signal périodique :

$$s(t) = \langle s \rangle + A \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\langle s \rangle$ la valeur moyenne (\Rightarrow composante continue du signal ($X(f=0)$)), A l'amplitude maximale (distance entre la moyenne et le maximum), $\omega = 2\pi f$ la pulsation, f la fréquence, ϕ la phase initiale.

Pour le signal de l'exo 3 :

$$x(t) = A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_1}{2} \cos(2\pi 4f_0 t + 4\phi_0)$$

avec

- $\frac{A_1}{2}$: amplitude maximale
- $(A_0 + \frac{A_1}{2})$: valeur moyenne \Rightarrow composante continue du signal ($X(f=0)$)

Définition générale de la puissance :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \xrightarrow{\text{signal périodique}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = S_{\text{eff}}^2$$

Pour les signaux périodiques $P = S_{\text{eff}}^2$ où S_{eff}^2 représente le carré de la valeur efficace du signal et peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P = S_{\text{eff}}^2 &= \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 + \langle s \rangle^2 \\ &= \left(\frac{A_1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{3A_1^2}{8} + A_0^2 + A_1 A_0 \end{aligned}$$