TD 4
Traitement du Signal

Objectifs

- Comment numériser un signal correctement
- Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Rappel

- **Quelques transformées de Fourier utiles**

$$\begin{aligned}
\delta(t-t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} \mathrm{e}^{-i2\pi f t_0}\\
\mathrm{e}^{+i2\pi f_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(f-f_0)\\
A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{\mathrm{e}^{+i2\pi f_0 t}+\mathrm{e}^{-i2\pi f_0 t}}{2} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]\\
A\sin(2\pi f_0 t) = \frac{\mathrm{e}^{+i2\pi f_0 t}-\mathrm{e}^{-i2\pi f_0 t}}{2i} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2}i\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]\\
A\Pi_{[-T;\,T]} &\xrightarrow{\text{TF}} 2AT\mathrm{sinc}(2T\pi f)\\
A\mathrm{sinc}(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2f_0}\Pi_{[-f_0;\,f_0]}\\
x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)
\end{aligned}$$

- **Théorème de Plancherel**

$$\begin{aligned}
\text{(convolution)} \quad x(t)*y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f).Y(f) \quad \text{(multiplication)}\\
\text{(multiplication)} \quad x(t).y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f)*Y(f) \quad \text{(convolution)}
\end{aligned}$$

- **Théorème de Shannon**

$$F_e \geqslant 2F_{max}$$

avec F_e la fréquence d'échantillonnage et F_{max} la fréquence maximale du signal considéré.

Exercice 1

En tant que jeune ingénieur en traitement du signal numérique, on vous charge de concevoir pour un client un système de numérisation spécifique basé entre autres sur un Convertisseur Analogique Numérique.

Les signaux que ce client souhaite analyser sont de trois types :

- De type porte centrée d'amplitude maximale 3 Volts et de largeur 6 μs
- De type cosinus d'amplitude crête/crête 4 Volts et de fréquence maximale possible 200 kHz
- De type sinus cardinal d'amplitude maximale 2 Volts et de largeur de lobe principal minimal 0,5 ms

Le client souhaite une erreur de quantification maximale de 0,1 Volt et que le système génère le moins de bits possible.

Le système désiré par le client doit bien sûr fonctionner avec tous les types de signaux ci-dessus et être le plus proche possible des spécifications.

$\Longrightarrow$ Proposez un système de numérisation complet, détaillé, en chiffrant toutes les caractéristiques nécessaires à sa conception.

Exercice 2

Soit un signal continu $v(t)$ formé de la somme de 2 sinusoïdes $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

$v_1(t)$ est une fonction sinus de fréquence $f_1 = 1$ Hz, d'amplitude variant entre 0 et 5 V alors que $v_2(t)$ est une fonction cosinus de fréquence $f_2 = 10$ Hz d'amplitude variant entre -0.1 V et 0.1V.

1. Donner la description mathématique de $v(t)$.
2. Tracer précisément le spectre en amplitude de $v(t)$.
3. Dans un premier temps, on suppose que les deux signaux contenus dans $v(t)$ forment le signal porteur d'information. On désire alors échantillonner le signal $v(t)$. Quelle fréquence d'échantillonnage proposez-vous ? Justifier.
4. On considère à présent que le signal sinusoïdal $v_2(t)$ est du bruit perturbant le signal porteur d'information $v_1(t)$. Quelle solution proposez-vous pour récupérer le signal utile à partir de la mesure de $v(t)$, préciser la fréquence de coupure. Quelle fréquence d'échantillonnage proposez-vous alors ? Justifier.

Exercice 3

On échantillonne à 500 échantillons par seconde un signal réel à temps continu qui est la somme de 3 sinusoïdes de fréquences respectives 50 Hz, 100 Hz et 300 Hz.

1. Dessiner le spectre d'amplitude du signal analogique.
2. Dessiner les spectre d'amplitude du signal échantillonné en expliquant les phénomènes observés.
3. Le signal analogique de départ est appliqué en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \text{sinc}(10\pi t)$. Quelle est l'allure du spectre d'amplitude du signal en sortie du filtre ?