

TD 4

Traitement du Signal

Solutionnaire

Objectifs

- Comment numériser un signal correctement
- Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Rappel

- Quelques transformées de Fourier utiles

$$\begin{aligned}
 \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} \\
 e^{+i2\pi f_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0) \\
 A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\
 A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2} i [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \\
 A \Pi_{[-T; T]} &\xrightarrow{\text{TF}} 2AT \text{sinc}(2T\pi f) \\
 A \text{sinc}(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2f_0} \Pi_{[-f_0; f_0]} \\
 x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)
 \end{aligned}$$

- **Théorème de Plancherel**

$$(\text{convolution}) \quad x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot Y(f) \quad (\text{multiplication})$$

$$(\text{multiplication}) \quad x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \quad (\text{convolution})$$

- **Théorème de Shannon**

$$F_e \geq 2F_{\max}$$

avec F_e la fréquence d'échantillonnage et $F_{\max}$ la fréquence maximale du signal considéré.

 Exercice 1

En tant que jeune ingénieur en traitement du signal numérique, on vous charge de concevoir pour un client un système de numérisation spécifique basé entre autres sur un Convertisseur Analogique Numérique.

Les signaux que ce client souhaite analyser sont de trois types :

- De type porte centrée d'amplitude maximale 3 Volts et de largeur $6 \mu\text{s}$
- De type cosinus d'amplitude crête/crête 4 Volts et de fréquence maximale possible 200 kHz
- De type sinus cardinal d'amplitude maximale 2 Volts et de largeur de lobe principal minimal 0,5 ms

Le client souhaite une erreur de quantification maximale de 0,1 Volt et que le système génère le moins de bits possible.

Le système désiré par le client doit bien sûr fonctionner avec tous les types de signaux ci-dessus et être le plus proche possible des spécifications.

⇒ Proposez un système de numérisation complet, détaillé, en chiffrant toutes les caractéristiques nécessaires à sa conception.

Réponse :

Le système doit fonctionner pour tous les types de signaux, nous devons donc déterminer les caractéristiques min/max à prendre en compte selon les différents critères.

Détermination de la fréquence d'échantillonnage $F_e \geq 2F_{max}$:

Pour les trois types de signaux que l'on doit numériser, il y a une porte ($x_1(t)$) dont le spectre est infini. Le système doit donc inclure un filtre anti-repliement (passe-bas) de fréquence de coupure f_c à déterminer.

- le signal $x_2(t)$ composé de cosinus est le signal dont le spectre est fini (deux Dirac) et ayant une fréquence possible la plus haute : $F_{max} = 200 \text{ kHz}$, donc pour satisfaire le théorème de Shannon il faudrait : $F_e \geq 2 \times 200 \text{ kHz}$.
- $F_e = 400 \text{ kHz}$ conviendrait aussi pour le signal $x_3(t)$ de type sinus cardinal.
- Pour $x_1(t)$, la porte, il faut fixer la fréquence de coupure f_c au moins à $f_c = F_{max} = 200 \text{ kHz}$. Ceci fonctionne mais couperait le spectre en plein dans le lobe secondaire. Il serait mieux de couper au premier zéro d'amplitude après 200 kHz, ce qui arrivera à 333 kHz (à savoir retrouver) donc augmenter F_e à 666 kHz.

⇒ Donc 2 options possibles :

$$\text{Option 1} = \begin{cases} F_e = 400 \text{ kHz} \\ f_c = 200 \text{ kHz} \end{cases}$$

$$\text{Option 2} = \begin{cases} F_e = 333 \text{ kHz} \\ f_c = 666 \text{ kHz} \end{cases}$$

Quantification avec erreur maximale de 0,1 Volt et le moins de bits possible :

- erreur de quantification : e
- erreur de quantification maximale souhaitée : $e_{max} = 0,1 \text{ Volt}$
- pas de quantification : $q = \frac{V}{2^n}$ avec V : la dynamique maximale (amplitude crête-crête) des signaux et n : le nombre de bits et donc 2^n le nombre d'intervalles ("paliers")

Méthode par arrondi : $q = 2e = 0,2 \text{ V}$

$$\Rightarrow q = \frac{V}{2^n} : \quad 0,2 = \frac{4}{2^n} \quad \Rightarrow \quad n = \log_2(20) = 4.3 \rightarrow n = 5 \text{ bits (minimum).}$$

Recalculons l'erreur en prenant $n = 5$ bits :

$$q = \frac{4}{2^5} = 0,125 \Rightarrow e = q/2 = 0.0625 < 0,1 \text{ V} \quad \checkmark$$

Méthode par troncature : $q = e = 0,1 \text{ V}$

$$\Rightarrow q = \frac{V}{2^n} : \quad 0,1 = \frac{4}{2^n} \quad \Rightarrow \quad n = \log_2(40) = 5.3 \rightarrow n = 6 \text{ bits (minimum).}$$

Recalculons l'erreur en prenant $n = 6$ bits :

$$q = \frac{4}{2^6} = 0,0625 \Rightarrow e = q = 0,0625 < 0,1 \text{ V} \quad \checkmark$$

Pour utiliser le moins de bits possible, il faut donc utiliser la **méthode de l'arrondi** et une **quantification sur 5 bits**.

Exercise 2

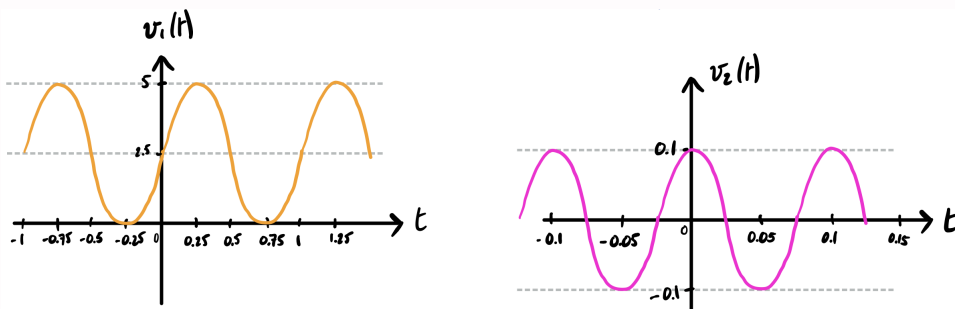
Soit un signal continu $v(t)$ formé de la somme de 2 sinusoïdes $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

$v_1(t)$ est une fonction sinus de fréquence $f_1 = 1$ Hz, d'amplitude variant entre 0 et 5 V alors que $v_2(t)$ est une fonction cosinus de fréquence $f_2 = 10$ Hz d'amplitude variant entre -0.1 V et 0.1V.

1. Donner la description mathématique de $v(t)$.
2. Tracer précisément le spectre en amplitude de $v(t)$.
3. Dans un premier temps, on suppose que les deux signaux contenus dans $v(t)$ forment le signal porteur d'information. On désire alors échantillonner le signal $v(t)$. Quelle fréquence d'échantillonnage proposez-vous? Justifier.
4. On considère à présent que le signal sinusoïdal $v_2(t)$ est du bruit perturbant le signal porteur d'information $v_1(t)$. Quelle solution proposez-vous pour récupérer le signal utile à partir de la mesure de $v(t)$, préciser la fréquence de coupure. Quelle fréquence d'échantillonnage proposez-vous alors? Justifier.

Réponse Q1 :

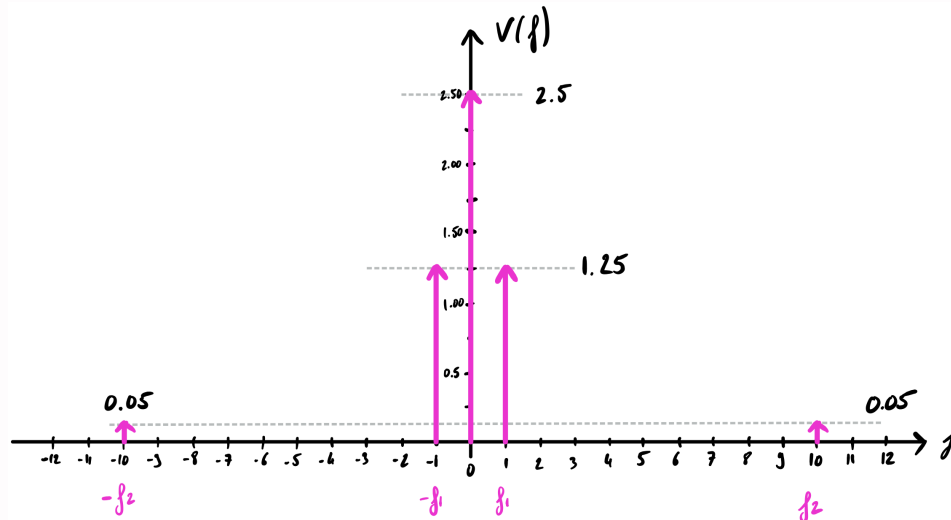
$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$
avec $v_1(t) = 2,5 \sin(2\pi f_1 t) + 2,5$ et $v_2(t) = 0,1 \cos(2\pi f_2 t)$ et $f_1(t) = 1$ Hz; $f_2(t) = 10$ Hz



Réponse Q2 :

$$\begin{aligned}
 TF[v(t)] &= TF[v_1(t)] + TF[v_2(t)] \\
 V(f) &= V_1(f) + V_2(f) \\
 v(t) &= \underbrace{2,5 \sin(2\pi f_1 t)}_{\frac{2,5}{2i} [e^{i2\pi f_1 t} - e^{-i2\pi f_1 t}]} + 2,5 + \underbrace{0,1 \cos(2\pi f_2 t)}_{\frac{0,1}{2} [e^{i2\pi f_2 t} + e^{-i2\pi f_2 t}]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 TF[v(t)] = V(f) &= \frac{i}{i} \times \frac{2,5}{2i} [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1)] + 2,5\delta(f) + \frac{0,1}{2} [\delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)] \\
 &= \frac{2,5i}{2} [\delta(f + f_1) - \delta(f - f_1)] + 2,5\delta(f) + \frac{0,1}{2} [\delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)]
 \end{aligned}$$



Réponse Q3 :

$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ est le signal porteur d'information.

Pour la fréquence d'échantillonnage, on souhaite pouvoir conserver f_1 et f_2 sans recouvrement spectral, selon le critère de Shannon : $F_e \geq 2F_{max}$

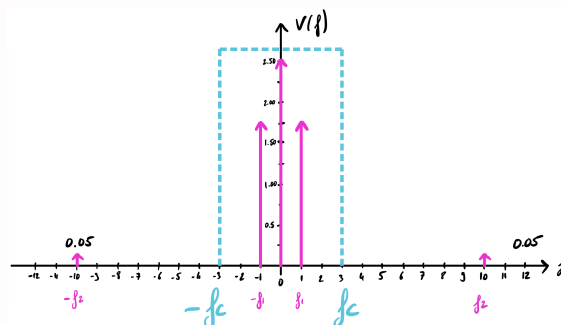
$$\Rightarrow F_e \geq 20 \text{ Hz}$$

Réponse Q4 :

$v(t) = v_1(t) + \underbrace{v_2(t)}_{\text{bruit}}$ donc seul $v_1(t)$ est le signal porteur d'information.

$v_2(t)$ se comportant comme du bruit, il faut le filtrer à l'aide d'un filtre "passe-bas" avec une fréquence de coupure f_c comprise entre $f_1 < f_c < f_2$ donc $1 \text{ Hz} < f_c < 10 \text{ Hz}$, ce qui permettrait de laisser passer uniquement le signal porteur d'information $v_1(t)$.

Par exemple, $f_c = 3 \text{ Hz}$; $F_2 \geq 2f_c = 6 \text{ Hz}$ (Attention : f_c devient la fréquence max du signal utile)



Exercise 3

On échantillonne à 500 échantillons par seconde un signal réel à temps continu qui est la somme de 3 sinusôides de fréquences respectives 50 Hz, 100 Hz et 300 Hz.

1. Dessiner le spectre d'amplitude du signal analogique.
2. Dessiner le spectre d'amplitude du signal échantillonné en expliquant les phénomènes observés.
3. Le signal analogique de départ est appliqué en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \text{sinc}(10\pi t)$. Quelle est l'allure du spectre d'amplitude du signal en sortie du filtre ?

Réponse Q1 :

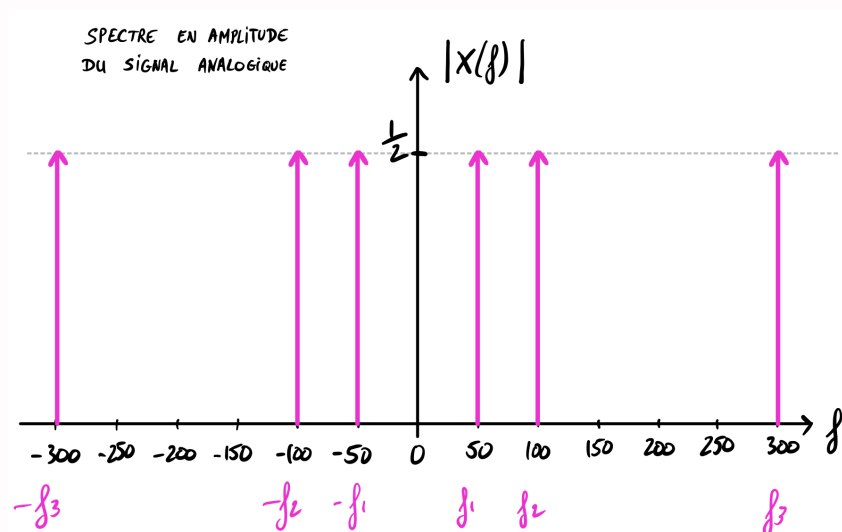
$x(t)$ est la somme de 3 sinusôides (avec une amplitude $A = 1$).

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2i} [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1) + \delta(f - f_2) - \delta(f + f_2) + \delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)]$$

$$|X(f)| = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + \delta(f - f_2) + \delta(f + f_2) + \delta(f - f_3) + \delta(f + f_3)]$$

avec $f_1 = 50 \text{ Hz}$; $f_2 = 100 \text{ Hz}$; $f_3 = 300 \text{ Hz}$



Réponse Q2 :

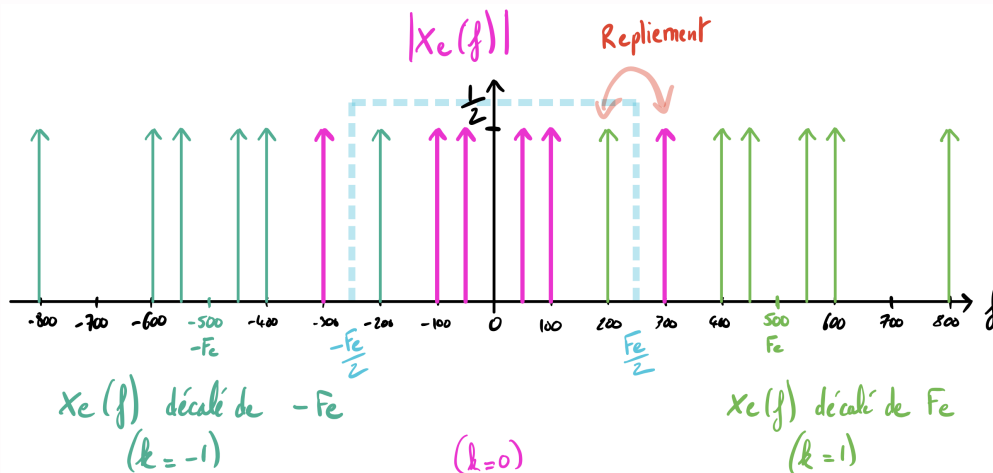
Rappel sur l'échantillonnage (revoir TD3) :

$$\begin{aligned}
 x_e(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\
 X_e(f) &= TF \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right] \\
 &= X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) \\
 &\Rightarrow \text{périodisation du spectre tous les } F_e = \frac{1}{T}
 \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, la fréquence d'échantillonnage est $F_e = \frac{1}{T_e} = 500$ Hz.

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right) = 500 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n500)$$

Shannon est-il respecté, $F_e \geq 2F_{max}$? $F_{max} = 300$ Hz $\Rightarrow \cancel{500} > \cancel{600}$ on peut donc s'attendre à du recouvrement.



Pour reconstruire le signal analogique, il suffit normalement de **conserver la bande** $\left[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}\right]$, correspondant à la porte **bleue** sur le schéma ci-dessus. Dans cette intervalle, nous obtenons la somme de trois sinusoïdes à 50, 100 et 200 Hz, au lieu de trois sinusoïdes à 50, 100, 300 Hz car le critère de Shannon n'a pas été respecté. En effet la fréquence d'échantillonnage aurait dû être : $F_e \geq 2F_{max} \rightarrow F_e \geq 600$ Hz.

Réponse Q3 :

Filtre de réponse impulsionnelle : $h(t) = \text{sinc}(10\pi t) = \text{sinc}(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 5$ Hz.
Signal en sortie du filtre :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$Y(f) = X(f) \frac{1}{10} \Pi_{[-5; 5]}(f)$$

$\Rightarrow$ filtre "passe-bas" de fréquence de coupure $f_c = 5$ Hz. En sortie du filtre il n'y aura aucun signal puisque le filtre ne laisse passer que les fréquences entre -5 et 5 Hz.

