TD 5
Traitement du Signal

Objectifs

- Illustration sous Matlab de l'échantillonnage d'un signal
- TFD et notion de résolution fréquentielle

Rappel

- **Quelques transformées de Fourier utiles**

$$\begin{aligned}
\delta(t-t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0}\\
e^{+i2\pi f_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(f-f_0)\\
A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+i2\pi f_0 t}+e^{-i2\pi f_0 t}}{2} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\\
A\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+i2\pi f_0 t}-e^{-i2\pi f_0 t}}{2i} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2}i[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]\\
A\Pi_{[-T;\,T]} &\xrightarrow{\text{TF}} 2AT\mathrm{sinc}(2T\pi f)\\
A\mathrm{sinc}(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2f_0}\Pi_{[-f_0;\,f_0]}\\
x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)
\end{aligned}$$

- **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**
  - ◇ Définition de la TFD :

$$X\left(f=\frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k\in\{0,1,\cdots,N-1\}$$

Périodique de période N en k (indice) donc de période F_e en f (fréquence)

  - ◇ Résolution spectrale :

$$\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T_{\text{observation}}}$$

- **Théorème de Plancherel**

$$\text{(convolution)}\quad x(t)*y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f).Y(f)\quad\text{(multiplication)}$$

$$\text{(multiplication)}\quad x(t).y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)*Y(f)\quad\text{(convolution)}$$

- **Sinus cardinal (domaine fréquentiel) :** $\mathrm{sinc}(2T\pi f) = \sin(2T\pi f)/(2T\pi f)$
  $\mathrm{sinc}(0)=1$
  $\mathrm{sinc}(2\pi fT)=0$? $\rightarrow$ la fonction sinus s'annule tous les "πk"
  $\hookrightarrow 2\pi fT = \pi k \Leftarrow$ la fonction sinc s'annule en $f=\frac{k}{2T}$

Exercice 1

On considère un signal $x(t)$ échantillonné à $T_e = 0,1$ s à partir de $t = 0$. On calcule une transformée de Fourier discrète (TFD) à partir de trois échantillons $x(n)$ ($n \in 0,1,2$) :

$$x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x(2) = 0.$$

1. Ecrire la matrice 3×3 permettant de calculer la TFD de x.

2. En quelles fréquences discrètes la TFD va-t-elle être calculée ?

3. Donner le résultat de la TFD.

4. Tracer les spectres d'amplitude et de phase de la TFD pour $f \in [-20\text{Hz}; +20\text{Hz}]$. L'axe des fréquences sera gradué en **Hertz**.

Exercice 2

On considère un signal analogique $x(t)$ échantillonné à la fréquence d'échantillonnage F_e. On note $x(n)$ un échantillon de ce signal. On sait que :

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

1. Écrire la fonction $x(t)$ dont l'échantillonnage a donné l'expression précédente de $x(n)$. Cette expression fera intervenir un signal sinusoïdal de fréquence f_0 et un signal cosinusoïdal de fréquence f_1.

2. Donner les expressions de f_0 et de f_1 en fonction de $T_e = 1/F_e$.

3. Quelle est la période T du signal $x(t)$ en fonction de T_e ?

4. Combien $x(t)$ compte-t-il d'échantillons par période ? On appelle K ce nombre.

5. Calculer et représenter la transformée de Fourier (TF) du signal $x(t)$.
6. **Sous Matlab - Calcul de la TFD et comparaison avec la TF :**
   (a) représenter $x(t)$ pour $F_e = 20$ kHz et $N = 100$ points,
   (b) calculer sa TFD (en utilisant les fonctions *fft* et *fftshift*),
   (c) représenter son spectre d'amplitude (en utilisant les fonctions *abs* et *stem*).
   (d) Comparer le résultat de la TFD à celui de la TF, avez-vous des pics exactement aux fréquences attendues ?
   (e) Que se passe-t-il pour le résultat de la TFD si nous satisfaisons la relation :

   $$NT_e = mT$$

   où m est un entier positif. À quoi correspond le paramètre NT_e sur le signal ? Quelle est la résolution spectrale (Δf) obtenue ?

7. Pour les signaux périodiques, expliquer la règle permettant d'obtenir un spectre de TFD contenant uniquement les fréquences de la TF (sans raies parasites), c'est à dire $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$.
8. Représenter un cas où $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$.

Exercice 3

On veut calculer, par la transformée de Fourier discrète (TFD), le spectre d'un signal pour lequel on peut admettre que les fréquences au-delà de 1,25 kHz sont négligeables. Lors de cette analyse, la résolution fréquentielle souhaitée doit être inférieure (ou égale) à 5 Hz.

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale requise ?
2. Quelle doit être la durée minimale du signal à traiter ?
3. En déduire le nombre d'échantillons dans ce signal.
4. Sachant que l'algorithme de la TFD est très efficace en utilisant un multiple de 2^n points, quel serait le nombre de points à considérer ainsi que la résolution spectrale associée ?
5. On ne dispose que d'une durée d'observation $T = 150$ ms. Quelle est la résolution fréquentielle obtenue ? Quelles solutions proposez-vous pour améliorer la représentation fréquentielle ?