

TD 5

Traitement du Signal

Solutionnaire

Objectifs

- Illustration sous Matlab de l'échantillonnage d'un signal
- TFD et notion de résolution fréquentielle

Rappel

- Quelques transformées de Fourier utiles

$$\begin{aligned}
 \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} \\
 e^{+i2\pi f_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0) \\
 A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\
 A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i} &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2} i [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \\
 A \Pi_{[-T; T]} &\xrightarrow{\text{TF}} 2AT \text{sinc}(2T\pi f) \\
 A \text{sinc}(2\pi f_0 t) &\xrightarrow{\text{TF}} \frac{A}{2f_0} \Pi_{[-f_0; f_0]} \\
 x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)
 \end{aligned}$$

- Transformée de Fourier Discrète (TFD)

◇ Définition de la TFD :

$$X\left(f = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \equiv X(k) \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Périodique de période N en k (indice) donc de période F_e en f (fréquence)

◇ Résolution spectrale :

$$\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T_{\text{observation}}}$$

- Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned}
 (\text{convolution}) \quad x(t) * y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f).Y(f) \quad (\text{multiplication}) \\
 (\text{multiplication}) \quad x(t).y(t) &\xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \quad (\text{convolution})
 \end{aligned}$$

- Sinus cardinal (domaine fréquentiel) : $\text{sinc}(2T\pi f) = \sin(2T\pi f)/(2T\pi f)$

$$\text{sinc}(0) = 1$$

$\text{sinc}(2\pi f T) = 0 ? \rightarrow$ la fonction sinus s'annule tous les " πk "

$$\Leftrightarrow 2\pi f T = \pi k \Leftrightarrow \text{la fonction sinc s'annule en } f = \frac{k}{2T}$$

Exercise 1

On considère un signal $x(t)$ échantillonné à $T_e = 0,1$ s à partir de $t = 0$. On calcule une transformée de Fourier discrète (TFD) à partir de trois échantillons $x(n)$ ($n \in 0, 1, 2$) :

$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 0.$$

1. Ecrire la matrice 3×3 permettant de calculer la TFD de x .
2. En quelles fréquences discrètes la TFD va-t-elle être calculée ?
3. Donner le résultat de la TFD.
4. Tracer les spectres d'amplitude et de phase de la TFD pour $f \in [-20\text{Hz}; +20\text{Hz}]$. L'axe des fréquences sera gradué en **Hertz**.

Réponse Q1 : matrice de la TFD

(voir diapositives 169-172)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

avec $N = 3$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^2 x(n) e^{-\frac{i2\pi nk}{3}} \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

donc

$$\begin{aligned} X(k=0) &= \sum_{n=0}^2 x(n) e^{-\frac{i2\pi n(k=0)}{3}} = 1x(0) + 1x(1) + 1x(2) \\ X(k=1) &= \sum_{n=0}^2 x(n) e^{-\frac{i2\pi n(k=1)}{3}} = 1x(0) + x(1)e^{-\frac{i2\pi 1}{3}} + x(2)e^{-\frac{i2\pi 2}{3}} \\ X(k=2) &= \sum_{n=0}^2 x(n) e^{-\frac{i2\pi n(k=2)}{3}} = 1x(0) + x(1)e^{-\frac{i2\pi 2}{3}} + x(2)e^{-\frac{i2\pi 4}{3}} \end{aligned}$$

d'où la matrice (voir diapositives 169-172) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \end{pmatrix}}_{\text{indice } k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{i2\pi}{3}} & e^{-\frac{i4\pi}{3}} \\ 1 & e^{-\frac{i4\pi}{3}} & e^{-\frac{i8\pi}{3}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{pmatrix}}_{\text{indice } n} \quad (1)$$

Réponse Q2 : fréquences discrètes de la TFD

$$f_k = \frac{k}{NT_e} = \frac{F_e k}{N} = \frac{10k}{3} \text{ Hz}$$

avec $F_e = \frac{1}{T_e} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ Hz}$ d'après l'énoncé.

Réponse Q3 : résultat de la TFD

D'après l'énoncé,

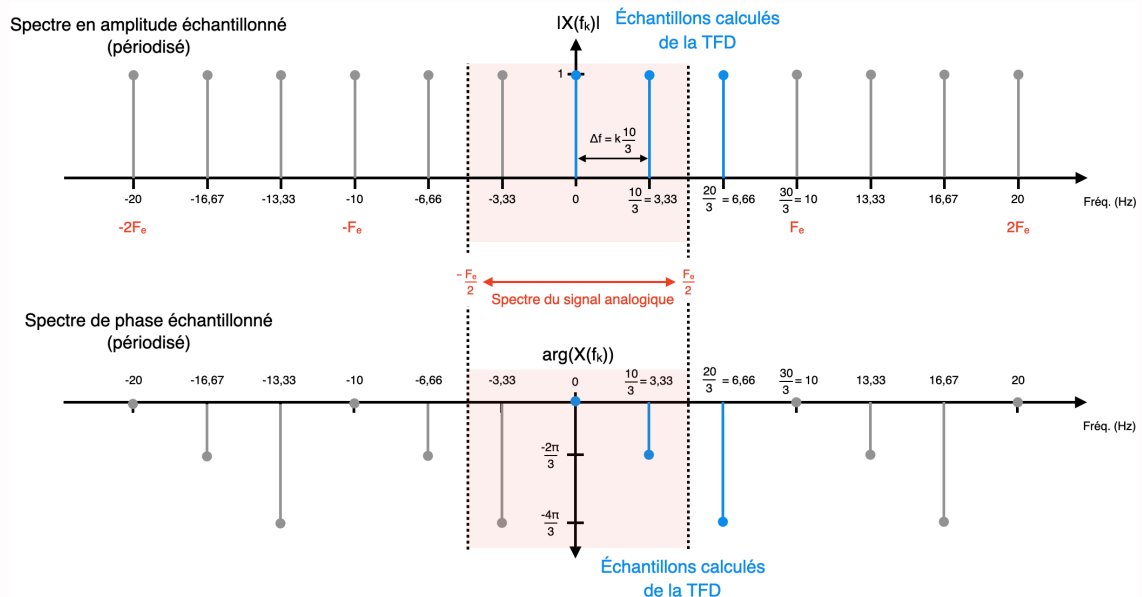
$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 0.$$

il suffit donc de remplacer ces valeurs dans l'équation (1) pour trouver le résultat de la TFD :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{i2\pi}{3}} & e^{-\frac{i4\pi}{3}} \\ 1 & e^{-\frac{i4\pi}{3}} & e^{-\frac{i8\pi}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{i2\pi}{3}} & e^{-\frac{i4\pi}{3}} \\ 1 & e^{-\frac{i4\pi}{3}} & e^{-\frac{i8\pi}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(0) &= 0 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1e^{i0} \\ X(1) &= 0 \times 1 + 1 \times e^{-\frac{i2\pi}{3}} + 0 \times e^{-\frac{i4\pi}{3}} = 1e^{-\frac{i2\pi}{3}} \\ X(2) &= 0 \times 1 + 1 \times e^{-\frac{i4\pi}{3}} + 0 \times e^{-\frac{i8\pi}{3}} = 1e^{-\frac{i4\pi}{3}} \end{aligned}$$

Réponse Q4 : Représentation de la TFD



Exercice 2

On considère un signal analogique $x(t)$ échantillonné à la fréquence d'échantillonnage F_e . On note $x(n)$ un échantillon de ce signal. On sait que :

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

1. Écrire la fonction $x(t)$ dont l'échantillonnage a donné l'expression précédente de $x(n)$. Cette expression fera intervenir un signal sinusoïdal de fréquence f_0 et un signal cosinusoidal de fréquence f_1 .
2. Donner les expressions de f_0 et de f_1 en fonction de $T_e = 1/F_e$.
3. Quelle est la période T du signal $x(t)$ en fonction de T_e ?
4. Combien $x(t)$ compte-t-il d'échantillons par période ? On appelle K ce nombre.
5. Calculer et représenter la transformée de Fourier (TF) du signal $x(t)$.
6. **Sous Matlab - Calcul de la TFD et comparaison avec la TF :**
 - (a) représenter $x(t)$ pour $F_e = 20$ kHz et $N = 100$ points,
 - (b) calculer sa TFD (en utilisant les fonctions `fft` et `fftshift`),
 - (c) représenter son spectre d'amplitude (en utilisant les fonctions `abs` et `stem`).
 - (d) Comparer le résultat de la TFD à celui de la TF, avez-vous des pics exactement aux fréquences attendues ?
 - (e) Que se passe-t-il pour le résultat de la TFD si nous satisfaisons la relation :

$$NT_e = mT$$

où m est un entier positif. À quoi correspond le paramètre NT_e sur le signal ?
Quelle est la résolution spectrale (Δf) obtenue ?

7. Pour les signaux périodiques, expliquer la règle permettant d'obtenir un spectre de TFD contenant uniquement les fréquences de la TF (sans raies parasites), c'est à dire $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$.
8. Représenter un cas où $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$.

Réponse Q1 : expression de $x(t)$

Rappel sur l'échantillonnage : on prend les valeurs de $x(t)$ pour les multiples entiers de T_e :

$$x(n) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e).$$

$$\begin{aligned}
 x(n) &= 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \\
 x(n) \Rightarrow x(nT_e) &= 1 + \sin\left(\frac{\pi n T_e}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi n T_e}{4}\right) \\
 &= 1 + \sin(2\pi f_0 n T_e) + 2\cos(2\pi f_1 n T_e) \\
 x(nT_e) \Rightarrow x(t) &= 1 + \sin(2\pi f_0 t) + 2\cos(2\pi f_1 t)
 \end{aligned}$$

Réponse Q2 : définition de f_0 et f_1 en fonction de T_e

$$\begin{aligned}
 x(n) &= 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \\
 x(nT_e) &= 1 + \sin(2\pi f_0 n T_e) + 2\cos(2\pi f_1 n T_e)
 \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 2\pi f_0 n T_e = \frac{n\pi}{3}, & \Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{6T_e} \\ 2\pi f_1 n T_e = \frac{n\pi}{4}, & \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{8T_e} \end{cases}$$

Réponse Q3 : période du signal

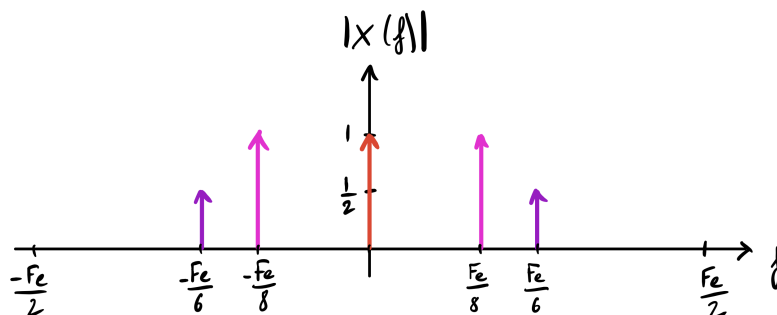
$x(t) = 1 + \sin(2\pi f_0 t) + 2\cos(2\pi f_1 t)$ avec $f_0 = \frac{1}{6T_e}$ et $f_1 = \frac{1}{8T_e}$ La période de $x(t)$ est le plus petit commun multiple (PPCM) entre $T_0 = 1/f_0 = 6T_e$ et $T_1 = 1/f_1 = 8T_e$.
 $\Rightarrow T = 24T_e$

Réponse Q4 : nombre d'échantillons par période

$T = K T_e \rightarrow T = 24T_e$ donc $K = 24$ échantillons par période.

Réponse Q5 :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 + \sin(2\pi f_0 t) + 2\cos(2\pi f_1 t) \\
 TF[x(t)] = X(f) &= \delta(f) + \frac{i}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] + 2 \times \frac{1}{2} [\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1)] \\
 |TF[x(t)]| = |X(f)| &= \delta(f) + \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] + [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]
 \end{aligned}$$



Réponse Q6 : Calcul de la TFD et comparaison avec la TF

(a) Génération de $x(t)$ - Matlab code

```
clearvars; close all; clc
N = 100; % Nombre de points d'acquisition
Fe = 20000; % frequence d'echantillonnage (Hz)
Te = 1/Fe; % periode d'echantillonnage (s)
d = N*Te; % temps total (s)

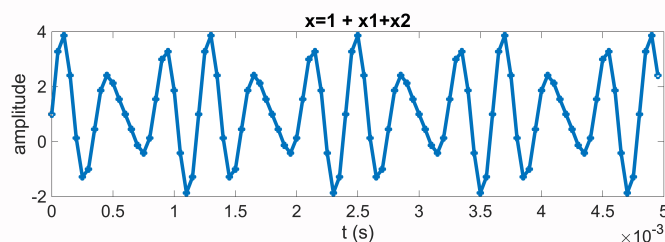
t = 0:Te:(d-Te); % vecteur temps

f0 = Fe/6; A0 = 1; % freq. (Hz) et amp. du signal 1
f1 = Fe/8; A1 = 2; % freq. (Hz) et amp. du signal 2

% sinusoides
x1 = A0*sin(2*pi*f0*t); % signal 1
x2 = A1*cos(2*pi*f1*t); % signal 2

% somme : 1 + signal 1 + signal 2
x = 1 + x1 + x2;

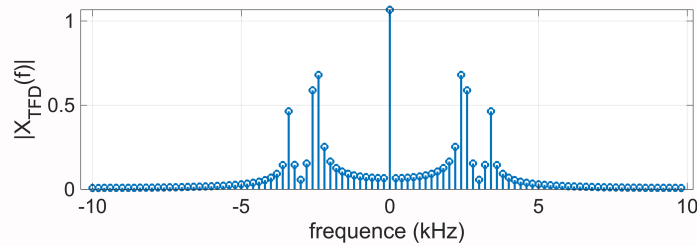
% Figure 1 : Representation de  $x = x1 + x2$ 
figure(1)
plot(t,x, '-o')
title('x=1 + x1+x2')
xlabel('t (s)')
ylabel('amplitude')
```



(b-c) Calcul et representation de la TFD de $x(t)$ - Matlab code

```
X = abs(fft(x))/N; % module de la TFD
X_shift = fftshift(X); % remettre dans le bon ordre freq.
negative/positive
df = Fe/N;
axe_freq = -Fe/2 : df : Fe/2-df;

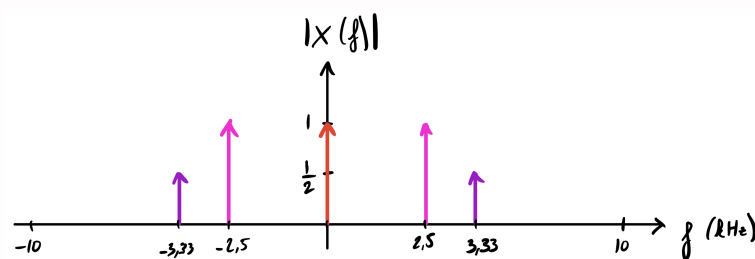
figure(2)
stem(axe_freq*1e-3,X_shift,'LineWidth',2)
xlabel('frequence (kHz)')
ylabel('|X(f)|')
grid on
```



(d) Comparer le résultat de la TFD à celui de la TF, avez-vous des pics exactement aux fréquences attendues?

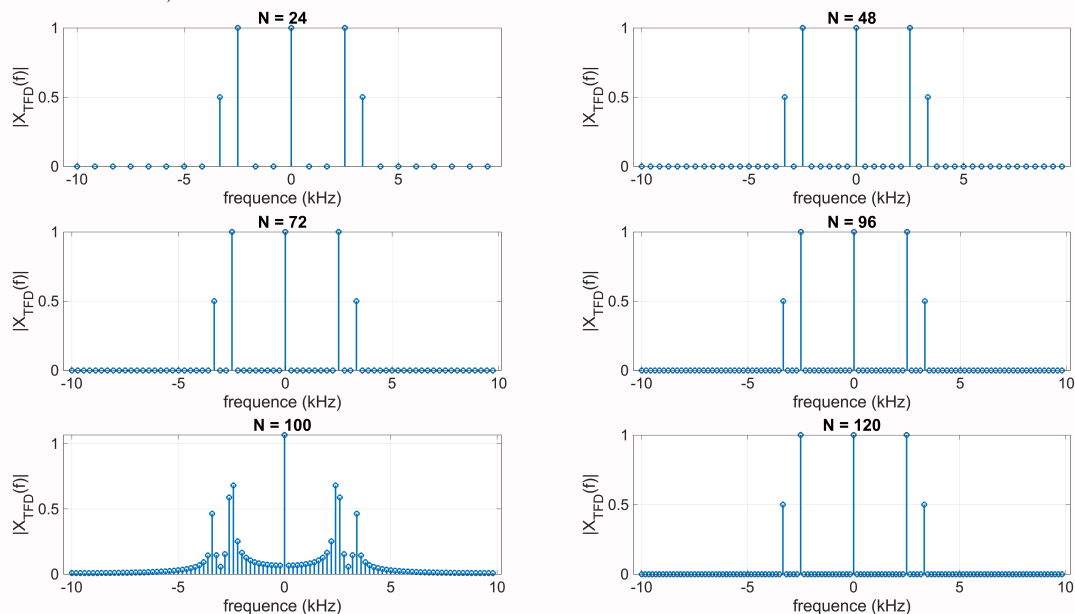
indice : non

Des fréquences (raies) parasites supplémentaires existent sur le résultat de la TFD par rapport à la TF.



(e) $NT_e = mT$

NT_e correspond à la durée du signal. Pour satisfaire l'équation $NT_e = mT$, il faut donc prendre un nombre entier (m) de périodes (T). Sachant qu'il y a 24 échantillons par période (cf. question 4). Il suffit donc de prendre un multiple de 24 comme valeur pour N afin de satisfaire $NT_e = mT$ (on relance le code en modifiant N).



Pour les cas où N est un multiple de 24, on observe que le résultat de la transformée de Fourier ($X_{TF}(f)$) est exactement équivalent au spectre calculé par transformée de Fourier Discrète ($X_{TFD}(f)$).

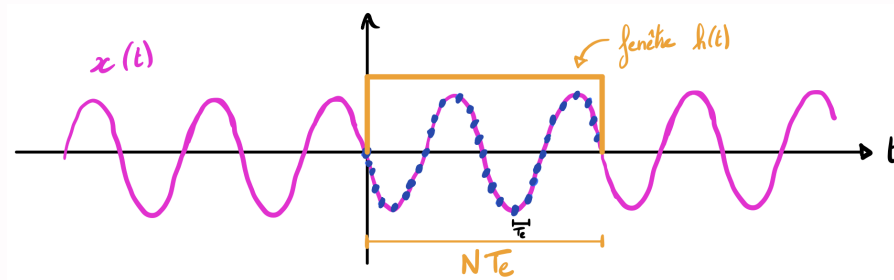
Réponse Q7 : si $NT_e = mT$ alors $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$

Pour les signaux périodiques, afin d'obtenir un spectre de TFD contenant uniquement les fréquences de la TF (sans raies parasites), c'est à dire $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$, il faut satisfaire :

$$\underbrace{NT_e}_{\text{durée du signal}} = mT$$

Pourquoi ?

Prenons le cas d'une simple sinusoïde $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ qui est échantillonnée sur N points espacés tous les T_e .

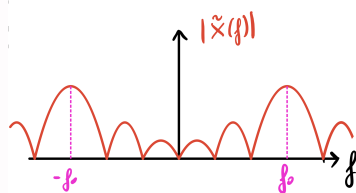


Le fait de prendre N points du signal d'origine revient à fenêtrer $x(t)$ par une porte de largeur NT_e (= la durée d'observation). La TF du signal obtenu, noté $TF[\tilde{x}(t)]$ est donc défini comme $TF[\tilde{x}(t)] = TF[x(t).h(t)] = TF[x(t)] * TF[h(t)]$. Comparons maintenant la TF et la TFD dans ce cas :

TF (signal continu)

$$TF[\underbrace{x(t)}_{\text{sin}} . \underbrace{h(t)}_{\text{porte}}] = TF[x(t)] * TF[h(t)]$$

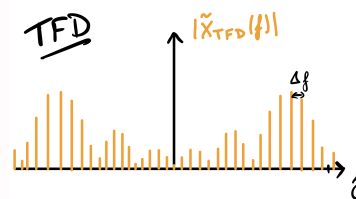
$$\tilde{X}(f) = \underbrace{X(f)}_{2 \text{ Dirac } \pm f_0} * \underbrace{H(f)}_{\text{sinc}}$$



$|\tilde{X}(f)|$ correspond à un sinus cardinal convolué avec deux Dirac (la convolution avec les Dirac va simplement décaler le sinc en $\pm f_0$).

TFD (signal discret)

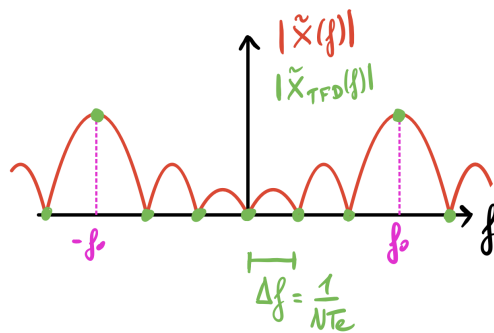
$$TFD[x(n).h(n)] = TFD[x(n)] * TFD[h(n)]$$



$|\tilde{X}_{TFD}(f)|$ correspond à la version discrétisée de $|\tilde{X}(f)|$ avec une raie en fréquence tous les $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$.

La TFD revient à approximer $\tilde{X}(f)$ en le discrétisant tous les $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$.

Pour supprimer les raies parasites, nous souhaitons donc obtenir uniquement les échantillons verts de la figure suivante.



Pour cela, il faut donc :

- (1) un échantillon fréquentiel exactement à f_0 (max du lobe principale)
- (2) et le reste des échantillons fréquentiels uniquement sur les zéros du sinc

Comment obtenir ces conditions ?

(1) Pour avoir un échantillon fréquentiel exactement à f_0 (max du lobe principale) il faut donc que f_0 soit un multiple de $\Delta f \Rightarrow f_0 = m\Delta f$ avec m est un entier positif.

$$f_0 = m\Delta f = \frac{m}{NT_e} \Leftrightarrow NT_e = \frac{m}{f_0} \Leftrightarrow NT_e = mT \quad \checkmark$$

avec $T = 1/f_0$: la période du signal.

(2) Pour savoir si le reste des échantillons fréquentiels seront uniquement sur les zéros du sinc, il faut donc regarder pour quelles valeurs (en fréquence) le sinc s'annule. Ce sinc provient de la TF d'une porte de largeur NT_e donc :

$$TF \left[\Pi \left[-\frac{NT_e}{2}, \frac{NT_e}{2} \right] \right] = NT_e \text{sinc}(NT_e \pi f)$$

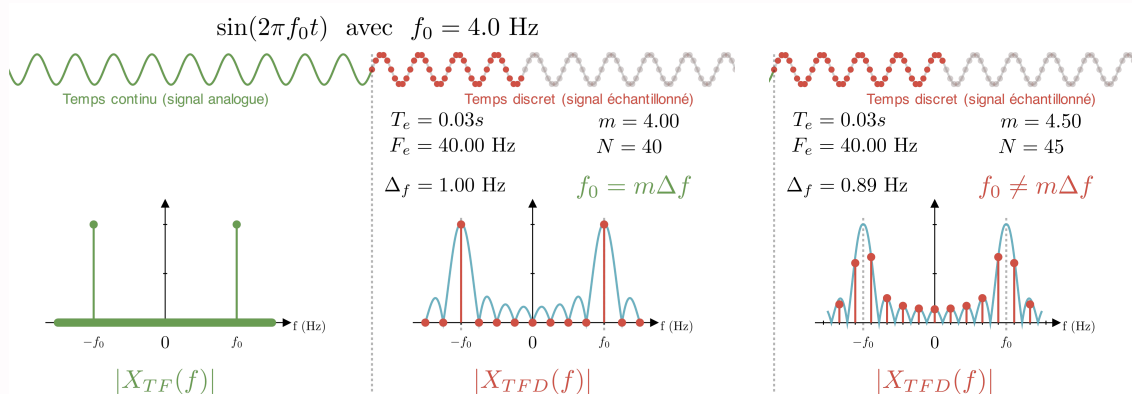
Les zéros de ce sinc sont tels que $NT_e \pi f = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{NT_e}$ avec k un entier. Bonne nouvelle!! car $\frac{1}{NT_e}$ correspond justement à la résolution fréquentielle (Δf) du spectre. $\Rightarrow$ Cela veut dire que nous aurons des échantillons uniquement sur les zéros du sinc (et un échantillon sur le max du sinc)!

Règle à retenir (pour les signaux périodiques) : pour obtenir le spectre de TFD contenant uniquement les fréquences de la TF (sans raies parasites), c'est à dire $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$, il faut satisfaire :

$$NT_e = mT \Leftrightarrow f_0 = m\Delta f$$

Conclusion : pour une signal périodique, il vaut mieux mesurer le signal sur un nombre entier de périodes!

Exemple sur un signal simple : TF vs TFD



Réponse Q8 : exemple de $X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f)$

Exemple :

Prenons $F_e = 20$ kHz :

$\Rightarrow f_0 = \frac{F_e}{6} \approx 3,33$ kHz et $f_1 = \frac{F_e}{8} = 2,5$ kHz.

Vérifions que $F_e \geq 2F_{max}$:

ici $F_{max} = f_1 \approx 3,33$ kHz donc 20 kHz $\geq 6,66$ kHz (pas de repliement spectral ✓)

Si on choisit de prendre une période de signal ($m = 1$) : $N = 24$ (cf. question 4).

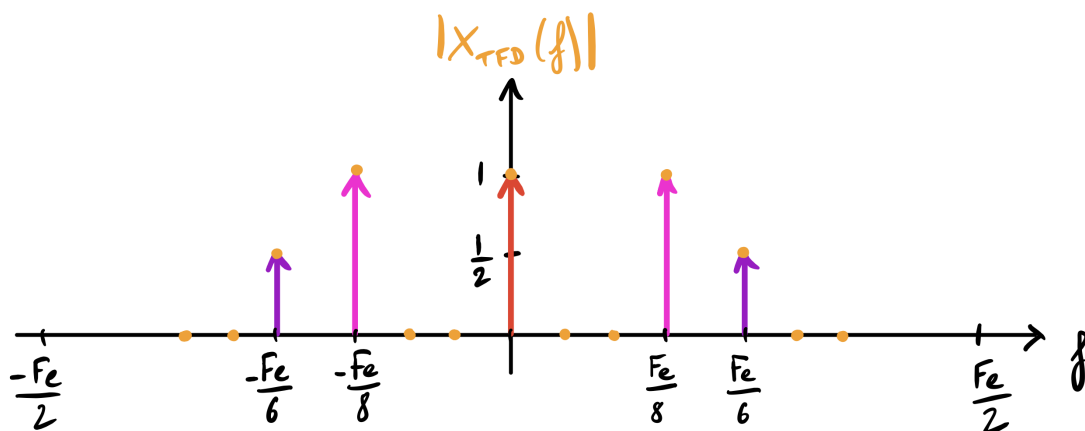
La résolution spectrale associée est donc :

$\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{20000}{24} \approx 833,33$ Hz (il y aura un point tous les 833,33 Hz dans le spectre).

Vérifions que $f_i = m\Delta f$:

$\rightarrow \frac{f_0}{\Delta f} = 4$ et $\frac{f_1}{\Delta f} = 3$ (nous obtenons bien des entiers ✓)

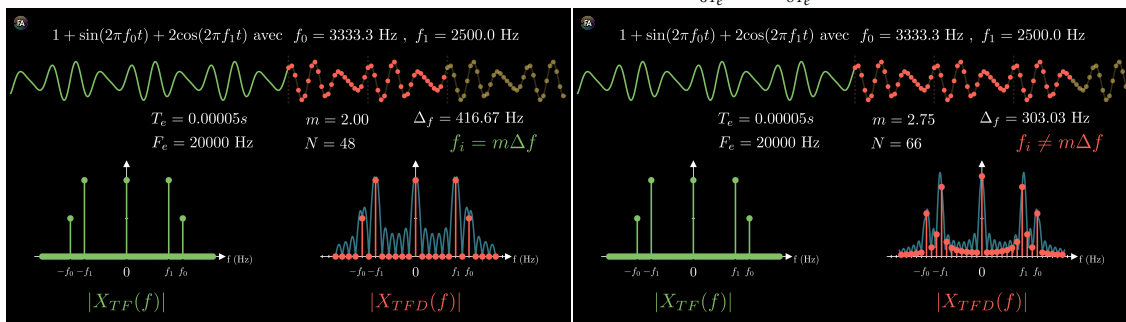
(une autre façon de vérifier en partant de $NT_e = mT$: ici $N = 24$, $m = 1$ et $T = 24T_e$ (cf. question 4) donc $NT_e = mT \rightarrow 24T_e = 24T_e$ ✓)



Pas de repliement et nous avons annulé toutes les raies parasites donc ici

$$X_{TF}(f) \equiv X_{TFD}(f).$$

Illustrations TF vs TFD : $x(t) = 1 + \sin(2\pi f_0 t) + 2\cos(2\pi f_1 t)$ avec $f_0 = \frac{1}{6T_e}$ et $f_1 = \frac{1}{8T_e}$:



 Exercice 3

On veut calculer, par la transformée de Fourier discrète (TFD), le spectre d'un signal pour lequel on peut admettre que les fréquences au-delà de 1,25 kHz sont négligeables. Lors de cette analyse, la résolution fréquentielle souhaitée doit être inférieure (ou égale) à 5 Hz.

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale requise ?
2. Quelle doit être la durée minimale du signal à traiter ?
3. En déduire le nombre d'échantillons dans ce signal.
4. Sachant que l'algorithme de la TFD est très efficace en utilisant un multiple de 2^n points, quel serait le nombre de points à considérer ainsi que la résolution spectrale associée ?
5. On ne dispose que d'une durée d'observation $T = 150$ ms. Quelle est la résolution fréquentielle obtenue ? Quelles solutions proposez-vous pour améliorer la représentation fréquentielle ?

Réponse Q1 : fréquence d'échantillonnage : F_e

Théorème de Shannon : $F_e \geq 2F_{max}$, avec F_e la fréquence d'échantillonnage et F_{max} : la fréquence maximale du signal ; ici $F_{max} = 1,25$ kHz donc $F_e \geq 2,5$ kHz.

Réponse Q2 : durée minimal : T

En partant de la définition de la résolution spectrale : $\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T_{\text{observation}}}$; donc $T = \frac{1}{\Delta f}$ et ici $\Delta f \leq 5$ Hz $\Rightarrow T \geq \frac{1}{5} = 200$ ms (donc au minimum $T = 200$ ms).

Réponse Q3 : nombre d'échantillons N

En prenant $T = 200$ ms, $F_e = 1/T_e = 2,5$ kHz et $\Delta f = 5$ Hz $\Rightarrow N = \frac{F_e}{\Delta f} = \frac{2500}{5} = 500$ points. (Ou encore $T = NT_e$ donc $N = \frac{T}{T_e} = TF_e = 0,2 \times 2500 = 500$ points).

Réponse Q4 : multiple de 2^n points

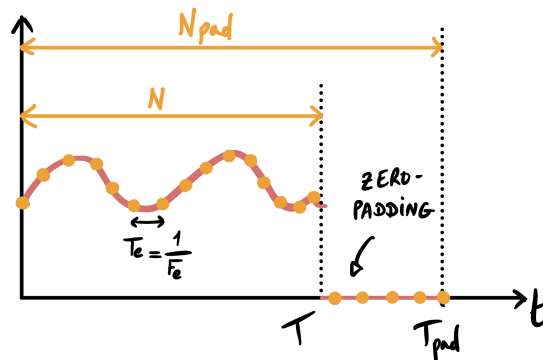
En utilisant un multiple de 2^n points (prendre la première valeur au dessus de 500 points) : $N = 2^9 = 512$ points $\Rightarrow \Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{2500}{512} \approx 4,88$ Hz < 5 Hz.

Réponse Q5 : améliorer la représentation fréquentielle

Si $T = 150$ ms $\Rightarrow \Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,150} \approx 6,7$ Hz > 5 Hz.

On peut imaginer faire du **zero-padding** : ajout de zeros à la fin du signal pour

artificiellement augmenter le nombre de points et donc la durée totale du signal.



En rajoutant par exemple 50 ms de zéros (N augmente : $N \rightarrow N_{pad}$ et T augmente aussi $T \rightarrow T_{pad}$)

$$\Rightarrow T_{pad} = 200 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow \Delta f_{pad} = \frac{F_e}{N_{pad}} = 5 \text{ Hz.}$$

Attention lors du zero-padding : il existe une différence entre la **précision** fréquentielle et la **résolution** fréquentielle.

Cet ajout de zéros a pour but d'améliorer la précision fréquentielle lors de la représentation du spectre mais la résolution fréquentielle (i.e. la capacité à distinguer deux fréquences très proches) restera $\Delta f = 6,7 \text{ Hz}$.

$$\Rightarrow \text{résolution fréquentielle : } \Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \text{précision fréquentielle : } \Delta f_{pad} = \frac{F_e}{N_{pad}} = \frac{1}{T_{pad}}$$

Si on travaille sur :

- le signal d'origine (sans zero-padding) $\Rightarrow$ précision = résolution
- le signal après zero-padding $\Rightarrow$ précision $\neq$ résolution

